Das Skalarprodukt von zwei Vektoren

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren berechnet sich folgendermaßen:

1. Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 26$

2. Beispiel: Gegeben sind die Vektoren $\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$:

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} = (-2{,}5) \cdot 6 + (-4) \cdot (-2) + (-9) \cdot 6{,}5 = -65{,}5$

Verallgemeinerung: Für des Skalarprodukt von zwei zwei- bzw. dreidimensionalen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt demnach

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad bzw. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Aufgabe 1: Berechne a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Fülle die Lücken a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 19$ b) $\begin{pmatrix} \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \end{pmatrix} = 51$

Aufgabe 3: Begründe, ob gilt

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 4: Finde wenigstens 3 Möglichkeiten, wie man das Skalarprodukt von zwei n-dimensionalen Vektoren aufschreiben kann.

Aufgabe 5: Betrachte zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und einen Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) Skizziere den Graphen der Funktion $f(\alpha) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Länge 1 haben sollen. Was fällt auf?

b) Angenommen $\vec{a}$ hat die Länge 1 und $\vec{b}$ die Länge 2, 3, 4, ... Was kann man über den Graphen von f sagen?

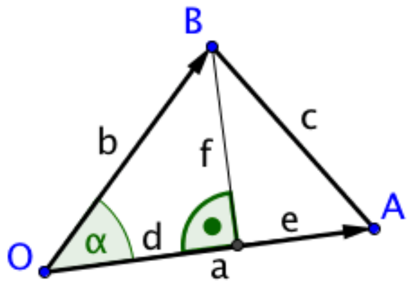
c) Angenommen $\vec{b}$ hat die Länge 1 und $\vec{a}$ die Länge 2, 3, 4, ... Was kann man über den Graphen von f sagen?

Eigenschaft des Skalarproduktes: Für das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt die Eigenschaft

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

wobei $0 \leq \alpha \leq \pi$ bzw. $0° \leq \alpha \leq 180°$ sei (je nachdem, ob man in Bogenlänge oder in Gradmaß misst oder messen möchte).

Begründung:



Im links abgebildeten Dreieck OAB gelten folgende Bezeichnungen:

$$a = |\overrightarrow{0A}| = |\vec{a}|,\ b = |\overrightarrow{0B}| = |\vec{b}|,\ c = |\overrightarrow{AB}|$$

Zudem gelten die Eigenschaften

$$c^2 = e^2 + f^2 \text{ und } f^2 = b^2 - d^2$$

sowie $e^2 = (a-d)^2 = a^2 - 2ad + d^2$

Hieraus folgt

$$c^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2ad$$

Aus $\cos(\alpha) = \frac{d}{b}$ folgt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha).$$

Umgeformt ergibt sich

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Für den Zähler $a^2 + b^2 - c^2$ gilt in Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 - \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2\right] \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned}$$

Demzufolge gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

also zum Beispiel für n=2

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Übungen

Aufgabe 1: Berechne den Winkel zwischen den Vektoren

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Auch wenn es banal erscheint - Was ist ein Winkel und wie kann man sich einen Winkel zwischen zwei Vektoren vorstellen?

Aufgabe 3: Prüfe, ob die Geraden sich schneiden. Wenn ja, berechne den Schnittpunkt und in welchem Winkel sich die Geraden schneiden.

a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Prüfe auf verschiedene Arten, ob das Raumdreieck ABC rechtwinklig ist.

a) A(1/2/3), B(2/1/4), C(3/1/0)

b) A(3/3/1), B(5/1/6), C(2/4/4)

Aufgabe 5: Berechne! Was fällt auf? Erkläre!

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Finde drei zu $\vec{a}$ senkrechte Vektoren.

b) Wie kann man sich alle zu $\vec{a}$ senkrechte Vektoren vorstellen?

c) Begründe, ob es zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechte Vektoren geben kann.

Aufgabe 7: Gegeben seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Finde drei zu $\vec{a}$ senkrechte Vektoren.

b) Wie kann man sich alle zu $\vec{a}$ senkrechte Vektoren vorstellen?

c) Begründe, ob es zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechte Vektoren geben kann.

d) Begründe, ob es zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrechte Vektoren geben kann.

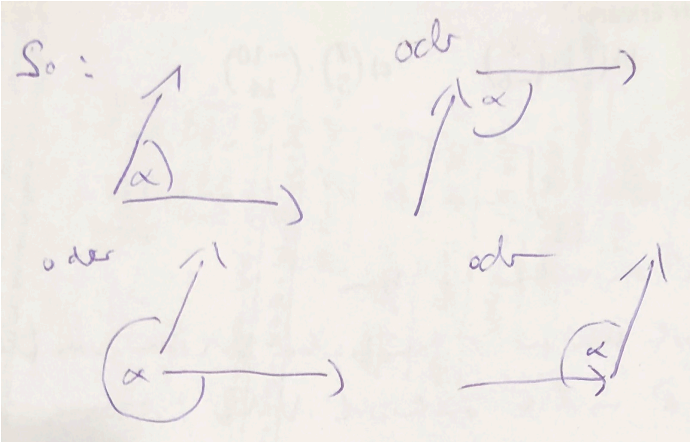
Aufgabe 8: Wenn sich zwei Geraden nicht schneiden, dann kann man „den“ Abstand von zwei Geraden berechnen.

a) Wie kann man „den“ Abstand von zwei Geraden in 2D und 3D veranschaulichen?

b) Finde eine Möglichkeit, wie man den Abstand in Aufgabe 3b) berechnen kann.

Zu Aufgabe 3: a) r=2, s=4 mit SP(5,2,6) und $\alpha \approx 19{,}5°$ b) kein SP

Zu Aufgabe 2: z.B.



-> Betrachtung der Herleitung wie darin α definiert wurde