Ableitungsregeln, es geht weiter...

Aus der Jgst. EF sind die folgenden Regeln bekannt:

Potenzregel:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow f`(x) = nx^{n-1}$
Faktorregel:	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow f`(x) = c \cdot u`(x)$
Summen- und Differenzregel:	$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$\Rightarrow f`(x) = u`(x) \pm v`(x)$

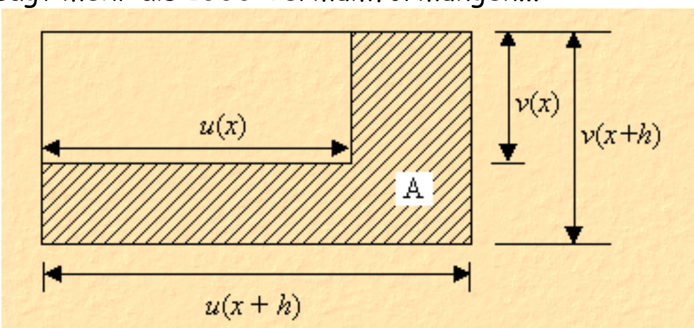
Es liegt nahe zu fragen, ob es analoge Regel auch für Produkte und Quotienten gibt!

Eine Funktionsgleichung, wie z.B. $f(x)=2x^2 \cdot (2 \cdot x+1)$ kann man als Produkt von zwei Funktionsgleichungen $u(x)=2 \cdot x^2$ und $v(x)=2 \cdot x+1$ schreiben. Man könnte versuchen für die Ableitung von f(x) ähnlich wie bei der Summen- und Differenzregel vorzugehen:

Aufgabe 1:

a) Leite f(x) analog zur Summenregel ab.
b) Forme den Funktionsterm von f(x) in ein Polynom um und leite diesen Term ab.
c) Vergleiche die Ergebnisse. Was vermutest du?

Aufgabe 2: Ein Bild sagt mehr als 1000 Termumformungen...



Ein Produkt kann geometrisch als Flächeninhalt eines Rechtecks gedeutet werden.
Eine Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ beschreibt demzufolge den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen u(x) und v(x). Die Ableitung einer Funktion bzw. die Tangentensteigung beschreibt in diesem Zusammenhang die Zunahme des Rechtecks.

Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist, dann gilt für die Tangentensteigung $f`(x)$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)\cdot v(x+h)\ +\ u(x)\cdot\big(v(x+h)-v(x)\big)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)}{h}\cdot v(x+h)\ +\ u(x)\cdot\frac{\big(v(x+h)-v(x)\big)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)}{h}\cdot v(x+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(u(x)\cdot\frac{\big(v(x+h)-v(x)\big)}{h}\right)\\
&=\quad u'(x)\quad\cdot v(x)\quad+\quad u(x)\cdot\quad v`(x)
\end{aligned}$$

Begründe die einzelnen Rechenschritte (wenn möglich mit Bezug zum Bild)!

Übungsaufgaben:

Aufgabe 1: Differenziere mit und ohne Anwendung der Produktregel.

$f(x)=(2+x)\cdot x \qquad g(x)=(1+2x^2)\cdot x^3 \qquad h(x)=(1+x)\cdot(1-x)$

Aufgabe 2: Leite mit der Produktregel ab. Entdeckst du eine Regelmäßigkeit?

a) $f_1(x)=(1+x)\cdot x^3 \qquad f_2(x)=(1+2x)\cdot x^3 \qquad f_3(x)=(1+3x)\cdot x^3,....$

b) $f_1(x)=(1-x)\cdot x \qquad f_2(x)=(1-x)\cdot x^2 \qquad f_3(x)=(1-x)\cdot x^3,....$

c) $f_1(x)=x\cdot\sqrt{x} \qquad f_2(x)=x^2\cdot\sqrt{x} \qquad f_3(x)=x^3\cdot\sqrt{x},....$

Aufgabe 3: Leite aus der Produktregel für 2 Faktoren eine solche für 3 Faktoren her.

Aufgabe 4: Wenn man die Funktionen u und v beliebig oft ableiten könnte, welche Regelmäßigkeit ergibt sich dann für (u·v)\`, (u·v)\`\`, (u·v)\`\`\`, ...?

Aufgabe 5: Wo Produkte sind, sind auch Quotienten!

Wenn man einen Funktionsterm, wie z.B. $f(x)=\frac{10x^2+15x^3}{5x}$ als Quotient von zwei Funktionstermen $u(x) = 10x^2+15x^3$ und $v(x) = 5x$ schreiben kann, so könnte es wiederum naheliegend sein, für die Ableitung von f(x) ähnlich wie bei der Summen- und Differenzregel vorzugehen.

a) Forme f(x) in ein Polynom um und leite diesen Term ab.
b) Leite f(x) analog zur Summenregel ab und vergleiche die beiden Ergebnisse.
c) Für die Herleitung der Quotientenregel kann man z.B. so vorgehen, dass man zum Finden neuer Regeln auf bekannte Regeln zurückgreift: Man schreibt $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ oder kurz $f=\frac{u}{v}$ um zu $f\cdot v=u$. Jetzt leitet man u (nach der Produktregel) ab, löst die Gleichung nach f\` auf und vereinfacht evtl. so weit, wie möglich.
d) Differenziere f (x) mit und ohne Anwendung der Quotientenregel.

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2} \qquad g(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^3} \qquad h(x)=\frac{x^2-1}{x+1} \qquad i(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$

e) Leite mit der Quotientenregel ab. Entdeckst du eine Regelmäßigkeit?

$e_1(x)=\frac{x}{x+1} \qquad e_2(x)=\frac{2x}{x+1} \qquad e_3(x)=\frac{3x}{x+1},\ ...$

$f_1(x)=\frac{x}{\sqrt{x}} \qquad f_2(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x}} \qquad f_3(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x}},\ \ ...$