

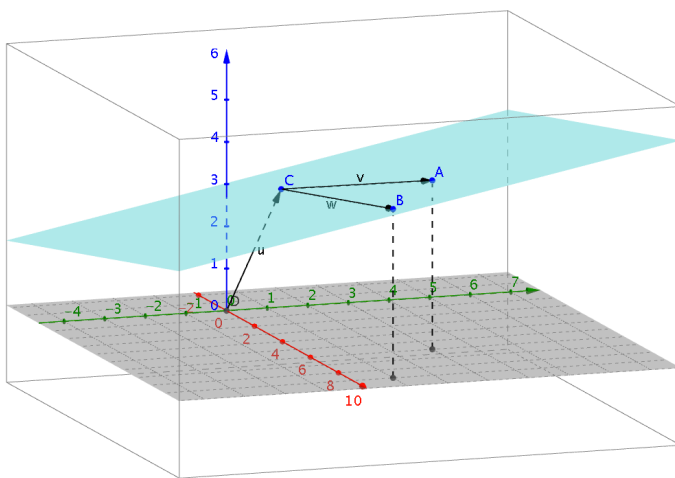
Geometrie und Computergrafik: Ebenen im Raum



Spielfiguren bewegen sich in Spielszenen oft auf Straßen, in oder auf Gebäuden. Die Abbildung oben zeigt einen Screenshot aus dem Computerspiel „Tom Clancy's The Division“. Die einfachste Art für die Darstellung von Bodenflächen oder Gebäudeseiten in Computerspielen sind Ebenen bzw. Ausschnitte aus Ebenen.

Ebenso wie Geraden können auch Ebenen im Raum auf verschiedene Arten mit Hilfe von Gleichungen beschrieben werden. Aus Gleichungssystemen ist die **Koordinatendarstellung oder Achsenabschnittsform einer Ebene** (z.B. $2x+y-4z=1$ oder $x/0.5+y/1+z/-0.25=1$) bekannt. Eine Alternative hierzu ist die **Punkt-Richtungsform einer Ebene** oder auch **parametrisierte Ebenengleichung**.

Diese ist naheliegend, wenn zu vorgegebenen Punkten eine Ebenengleichung erstellt werden soll:



Eine Punkt-Richtungsform der Ebene e durch die Punkte $A(6,3,4)$, $B(9,1,4)$ und $C(1,1,3)$ ist zum Beispiel

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Wie hängen die Zahlen in der Gleichung von den Koordinaten von A, B und C ab?
2. Welche Punkte erhält man für $r=1$ und $s=2$ bzw. $r=2$ und $s=1$?
3. Finde 2 weitere parametrisierte Ebenengleichungen, in denen die Punkte A, B und C liegen.

4. Begründe, ob die Punkte $E(5,2,1)$, $F(14,3,4)$ und $G(11,5,5)$ in e liegen.

5. Begründe, ob $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Ebene durch A, B und C ist.

6. Wie kann man die xy -, die yz - und die xz -Ebene mit einer möglichst einfachen parametrisierten Ebenengleichung beschreiben?
7. Wie kann man eine Ebenen in Parameterdarstellung in eine Ebene in Koordinatendarstellung umwandeln und umgekehrt?
8. Welche Vor- und Nachteile haben die beiden Ebenendarstellungen?