# Die Ableitung einer Exponentialfunktion

Aus f(x) = $a^x$ mit a>0 folgt:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right)$$
$$=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)$$

Beim Ableiten einer Exponentialfunktion $a^x$ erhält man (überraschenderweise?) wieder den Term $a^x$ nur versehen mit dem Faktor $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$.

Der Term $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ soll nun in Abhängigkeit von a anhand von zwei Zahlenbeispielen untersucht werden:

**1. Beispiel:** $f(x)=2^x \;\Rightarrow\; f\,'(x)=2^x\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$

**Aufgabe:** Bestimme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$ mit der Wertetabelle auf 4 Nachkommastellen genau:

| h | 0,1 | 0,01 | 0,001 | ... |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{2^h-1}{h}$ | | | | |

Also gilt $f(x)=2^x \;\Rightarrow\; f\,'(x)=2^x\cdot$ ___________

**2. Beispiel:** $f(x)=3^x \;\Rightarrow\; f\,'(x)=3^x\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}$

**Aufgabe:** Bestimme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}$ mit der Wertetabelle auf 4 Nachkommastellen genau:

| h | 0,1 | 0,01 | 0,001 | ... |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{3^h-1}{h}$ | | | | |

Also gilt $f(x)=3^x \;\Rightarrow\; f\,'(x)=3^x\cdot$ ____________

Für eine andere Basis a muss dieses Verfahren erneut durchgeführt werden, um den Grenzwert von $\frac{a^h-1}{h}$ näherungsweise zu bestimmen.

# Alternative

**Mit der folgenden Idee kann man die Grenzwertbestimmung vermeiden:**
Es gilt

$$\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \approx 2^x \cdot 0{,}6931 \quad \text{und} \quad \left(3^x\right)' = 3^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \approx 3^x \cdot 1{,}0986$$

Da 0,6931 < 1 und 1,0986 > 1 ist, könnte es eine Exponentialfunktion mit der Basis a geben,

mit $$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x \cdot 1 = a^x}$$

Die Ableitung dieser Exponentialfunktion wäre sie also selber!

**Aufgabe:** Diese Basis a kann man näherungsweise mit folgender Idee bestimmen: Statt
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h} = 1$ schreibt man $\dfrac{a^h-1}{h} \approx 1$

a) Forme die Gleichung $\dfrac{a^h-1}{h} \approx 1$ nach a um
b) Setze für h systematisch Werte möglichst nahe bei 0 ein, so dass du a auf 4 Nachkommastellen genau angeben kannst.

Für diese Zahl $a = \lim\limits_{h\to 0}\sqrt[h]{1+h}$ benutzt man die Symbolschreibweise „e“ (e als Symbol für die sogenannte Eulersche Zahl ähnlich wie π das Symbol für die Kreiszahl Pi ist). Es gilt:

$$\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f\,'(x) = e^x}$$

**Zurück zur Vermeidung der Grenzwertberechnung:**
Da $3^{(..)}$ und $\log_3(..)$ oder $4^{(..)}$ und $\log_4(..)$ jeweils Umkehrungen voneinander sind, gilt

$$x = 3^{\log_3(x)} = 4^{\log_4(x)}$$

Also gilt auch

$$2^x = 3^{\log_3(2^x)} = 4^{\log_4(2^x)}$$

Der Logarithmus zur Basis e hat den besonderen Namen „logarithmus naturalis“ und wird mit „ln(..)“ statt „$\log_e$(..)“ abgekürzt. Damit gilt


$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{\ln(\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{x\,Faktoren})} = e^{\underbrace{\ln(2)+\ln(2)+\ldots+\ln(2)}_{x\,Summanden}} = e^{x\cdot\ln(2)}$$

Nun leitet man $2^x$ bzw. $e^{x\cdot\ln(2)}$ mit Hilfe der Kettenregel ab. Also gilt

$$f\,'(x) = (2^x)' = (e^{x\cdot\ln 2})' = e^{x\cdot\ln(2)}\cdot\ln(2) = 2^x\cdot\ln(2)$$

Analog gilt z.B.

$$f\,'(x) = (3^x)' = (e^{x\cdot\ln 3})' = e^{x\cdot\ln(3)}\cdot\ln(3) = 3^x\cdot\ln(3)$$

Die auf der letzten Seite angenäherten Faktoren 0,6931 und 1,0986 sind demzufolge Näherungswerte für ln(2) und ln(3).

Anstelle einer Annäherung der Ableitung einer Exponentialfunktion kann diese ebenso mit Hilfe der Berechnung des natürlichen Logarithmus der Basis der Exponentialfunktion exakt berechnet werde!

**Aufgabe:** Leite ab!

$a)\ f(x) = 3^x \qquad b)\ f(x) = 5^x \qquad c)\ f(x) = 0{,}3^x \qquad d)\ f(x) = 0{,}5^x$

$e)\ f(x) = e^{-x} \qquad f)\ f(x) = e^{3x} \qquad g)\ f(x) = e^{\frac{x}{2}} \qquad h)\ f(x) = e^{-x^2}$