Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Neben den 4 Grundrechenarten ist die ***Verkettung von Funktionen*** eine weitere Verknüpfungsmöglichkeit. Wie bei den 4 Grundrechenarten geht es um zwei Funktionen, die bei einer Verkettung auf eine neue Art miteinander verbunden werden.

Aufgabe 1: Verketten

Eine Verkettung von zwei Funktionen u(x) und v(x) schreibt man als f(x) = u(v(x)). Das bedeutet, dass man in u(x) für x den Term von v(x) einsetzt. Beispiel: f(x) = sin(0,2x^2) ist eine Verkettung von u(x) = sin(x) mit der Funktion v(x) = 0,2x^2.

Mit welcher (möglichst einfachen) Gleichung kann man f(x) beschreiben, wenn

i) $u(x)=x^2$ und $v(x)=2x+1$ ii) $u(x)=\sqrt{x}$ und $v(x)=5x-2+3x$

iii) $u(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$ und $v(x)=\sqrt{x}$ iv) $u(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$ und $v(x)=2x-1$

Aufgabe 2: Zerlegen

Welche zwei Funktionen u(x) und v(x) könnten hier jeweils miteinander verkettet sein?

$$f_1(x)=\cos(\sqrt{x}) \qquad f_2(x)=\frac{5}{x^3} \qquad f_3(x)=(2x+3)^5 \qquad f_4(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$$

$$f_5(x)=2^{-x^2} \qquad f_6(x)=\log_{10}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_7(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 3: Die Herleitung der Kettenregel

Wenn f(x) = u(v(x)), dann gilt für die Tangentensteigung f ' (x)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(v(x+h))\ -u(v(x))}{v(x+h)-v(x)}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(v(x+h))\ -u(v(x))}{v(x+h)-v(x)}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)\\
&=\ u'(v(x))\cdot v'(x)
\end{aligned}$$

Begründe die einzelnen Rechenschritte.

Übungsaufgaben:

Aufgabe 1: Differenziere **mit und ohne** Anwendung der Kettenregel:

$$f_1(x)=(2x-1)^2 \qquad f_2(x)=\sqrt[3]{x^4} \qquad f_3(x)=\frac{1}{(3x+1)^2}$$

Aufgabe 2: Leite mit der Kettenregel ab. Entdeckst du eine Regelmäßigkeit?

a) $f_1(x)=(1+2x)^2 \qquad f_2(x)=(1+3x)^2 \qquad f_3(x)=(1+4x)^2$,....

b) $f_1(x)=(1+x)^3 \qquad f_2(x)=(1+x)^4 \qquad f_3(x)=(1+x)^5$,....

c) $f_1(x)=\sqrt{x^2-1} \qquad f_2(x)=\sqrt{x^3-1} \qquad f_3(x)=\sqrt{x^4-1}$,....

Aufgabe 3: Die Produktregel könnte man mit der Kettenregel herleiten

Aus der 1.binomischen Formel folgt (u + v)^2 = u^2 + 2·u·v + v^2. Leite beide Seiten der Gleichung ab und löse nach (u·v)' auf...

Ableiten „bis der Arzt kommt"!!

Bestimme f'(x) und versuche f'(x) zu vereinfachen

$a)\ f(x)=x^2(1-4x^3)$ $b)\ f(x)=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ $c)\ f(x)=\sin(x)\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=\frac{1}{x}(x^3-2x+1)$

$d)\ f(x)=\frac{1}{x}\cos(x)$ $e)\ f(x)=\sin(x)\cos(x)$ $f)\ f(x)=\left(\sin(x)\right)^2$ $g)\ f(x)=(2x^2-3x)^2$

$h)\ f(x)=(3x^3-2x^2)^5$ $i)\ f(x)=\arccos(x)$ $j)\ f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}$ $k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4}$

$l)\ f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ $m)\ f(x)=\frac{\sin(x)-x}{\cos(x)-x}$ $n)\ f(x)=\tan(x)$ $o)\ f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$

$p)\ f(x)=\ln(x^2)$ $q)\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ $r)\ f(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)^3$ $s)\ f(x)=\sin(\frac{1}{x})$

$t)\ f(x)=x\sqrt{x^3+1}$ $u)\ f(x)=\frac{16-4x^2}{2-x}$ $v)\ f(x)=\left(\cos(4x)\right)^3$