

Das Spatprodukt von drei Vektoren

Das Spatprodukt von drei Vektoren ist eine Kombination von Kreuz- und Skalarprodukt und berechnet sich folgendermaßen:

1. Beispiel:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 32$$

2. Beispiel:

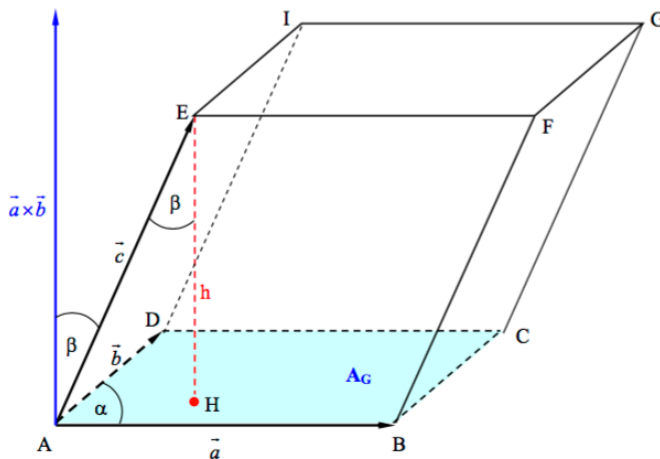
$$\left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5$$

Verallgemeinerung: Für drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt für das Spatprodukt

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot c_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot c_3 \end{aligned}$$

Eigenschaft des Spatproduktes: Für das Volumen V eines durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Spats gilt

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



Begründung:

Im links abgebildeten Spat ABCDEFGI gilt für $0 \leq \beta \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} V &= A_G \cdot h \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot h \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\beta) \\ &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \end{aligned}$$

Quelle der Grafik: http://www.mathe-schule.de/homepage/default_mathe.htm

Aufgabe: Begründe/Recherchiere, inwiefern man mit dem Spatprodukt

- den Abstand eines Punktes zu einer Ebenen,
- den Abstand zweier windschiefer Geraden und
- das Volumen eines Tetraeders berechnen kann.