Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren

Das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) von zwei Vektoren berechnet sich folgendermaßen:

1. Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot(-5)-3\cdot 4\\-(1\cdot(-5)-3\cdot 1)\\1\cdot 4-(-2)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\6\end{pmatrix}$$

2. Beispiel:

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)-3\cdot 2\\-(2\cdot(-1)-3\cdot 1)\\2\cdot 2-2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\5\\2\end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung: Für das Vektorprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ gilt demnach

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\-(a_1b_3-a_3b_1)\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

(Das „×“ dient zur Unterscheidung von einem Skalarprodukt zweier Vektoren).

Aufgabe 1: Berechne a) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Fülle die Lücken a) $\begin{pmatrix}1\\-3\\ \ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\ \\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \ \\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}\ \\-4\\-7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\ \ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \ \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Begründe, ob gilt

a) $\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-15\\11\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ c) $\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

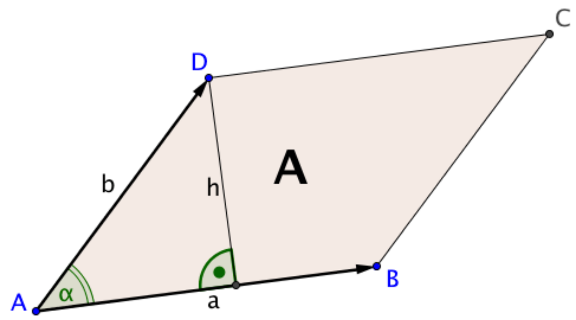
Aufgabe 4: Für drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gelte $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$. Berechne anhand selbst gewählter Beispiele $\vec{a}\cdot\vec{c}$ und $\vec{b}\cdot\vec{c}$. Was kann man vermuten?

Aufgabe 5: Betrachte zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und einen Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Was kann man über den Graphen der Funktion $f(\alpha)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ vermuten?

Eigenschaft des Kreuzproduktes: Für des Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt die Eigenschaft

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\alpha)$$

wobei $0 \leq \alpha \leq \pi$ ist (α ist also der kleinere Winkel zwischen den beiden Vektoren).



Begründung:
Im links abgebildeten Parallelogramm ABCD gelten folgende Bezeichnungen:

$$a = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|,\ b = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\vec{b}\right|$$

Für den Flächeninhalt A des Parallelogramms ABCD gilt

$$\begin{aligned} A &= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{h}\right| \\ &= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\alpha) &= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2} \\
&= \sqrt{\left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)^2 \cdot \left(1 - \cos(\alpha)^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)^2 - \left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)^2 \cdot \cos(\alpha)^2} \\
&= \sqrt{\left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)^2 - \left(|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|\right)^2 \cdot \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}{\left(|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\right)^2}} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2} \\
&= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left|\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|
\end{aligned}$$

Aufgabe: Begründe/Recherchiere, inwiefern man mit dem Kreuzprodukt
- Ebenengleichungen in Parameterform in Koordinatenform umformen,
- den Abstand eines Punktes zu einer Geraden und
- den Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebenen berechnen kann.