Der Mann auf dem Mond

Problem: Auf welche Geschwindigkeit muss man eine Rakete beschleunigen, damit sichergestellt ist, dass sie den Weltraum erreicht?

Es muss offensichtlich gegen die Schwerkraft der Erde gearbeitet werden. Newton fand das Gravitationsgesetz: Je „schwerer“ ein Körper **und** je „größer“ ein Planet, desto größer die auf den Körper wirkende Anziehungskraft (das „merkt“ man). Newton nahm Proportionalität der Abhängigkeiten an. Zudem nimmt die Anziehungskraft mit dem Quadrat der Entfernung ab (wenn ein Objekt doppelt so weit entfernt ist, „sieht“ man ja auch nur noch ¼ der Fläche, auf die die Anziehungskraft wirken kann). Daraus „folgt“:

$$F(x) = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{x^2}$$

mit m = Masse der Rakete, M = Masse der Erde, x = Entfernung zum Erdmittelpunkt und γ = Newtons’sche Gravitationskonstante.

Um eine Rakete in den Weltraum zu „befördern“ berechnet die hierfür (minimal) benötigte Arbeit (~Energie) durch

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty F(x)\,dx = \int_r^\infty \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{x^2}\,dx \qquad &= \lim_{R\to\infty} \int_r^R \gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \lim_{R\to\infty} \int_r^R \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_r^R \\
&= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right] \\
&= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \left[0 + \frac{1}{r}\right] \\
&= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Wäre es andererseits möglich eine Rakete über den ganzen Weg in den Weltraum konstant zu beschleunigen, dann würde sich die (minimal) zu verrichtende Arbeit berechnen durch:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Um die benötigte (minimale) Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, die notwendig ist, um dem Schwerefeld der Erde zu „entkommen“, kann man diese beiden Terme nun gleichsetzen, versuchen nach v aufzulösen und konkrete Werte einzusetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} \\
v^2 &= 2 \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r} \\
v &= \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$v \approx \sqrt{2 \cdot (6{,}7 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right]) \cdot (6 \cdot 10^{24} [kg]) \cdot \frac{1}{6400 [km]}} \approx ?\ [\text{km/h}]$$