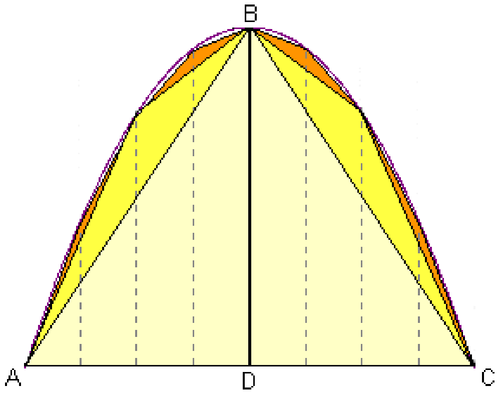
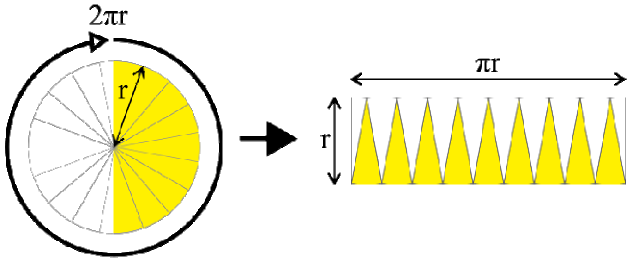
Quadratur – Flächeninhalt – Integral

Der „Großvater“ der Integralrechnung war u.a. Archimedes (287 - 212 v. Chr.). Ihm wird die Idee der **Quadratur des Kreises (rechts)**

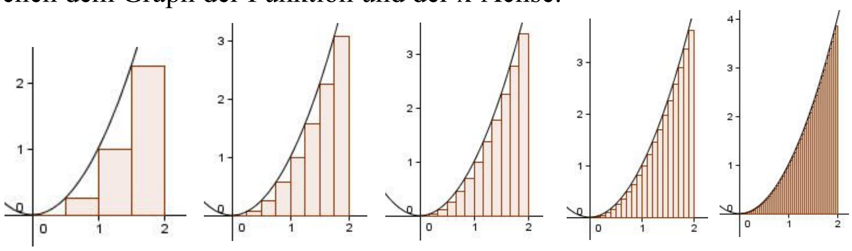




und die Idee der **Quadratur der Parabel (Abbildung links)** zugeschrieben.

Erst sehr viel später entwickelten und präzisierten Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716) Isaak Newton (1642–1726) und Bernhard Riemann (1826–1866) die Idee des Integrals und der sogenannten **„Unter- und Obersumme“** zur Flächeninhaltsberechnung:

Anschaulich wird hierbei eine Fläche mit „krummlinigem“ Rand durch Rechtecke mit **gleicher Breite** abgeschätzt (wie etwa rechts abgebildet). Die folgende Grafik zeigt: Je mehr Rechtecke man einbeschreibt und je schmaler diese Rechtecke sind, desto genauer beschreibt die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke den Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion und der x-Achse.



Das, was zuvor anschaulich /geometrisch beschrieben wurde, soll nun auch rechnerisch anhand eines Beispiels analysiert werden:

Zu $f(x) = x^2$ soll für $0 \le x \le 2$ der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von f(x) nach oben und unten mit Rechtecken abgeschätzt werden. Unterteilt man die x-Achse in 4 Abschnitte gleicher Breite, so folgt

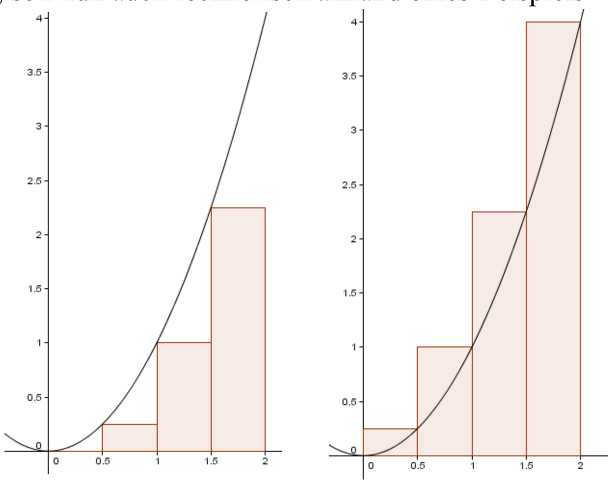
…für die **Untersumme U_4**

$$U_4 = 0{,}5\cdot 0^2 + 0{,}5\cdot 0{,}5^2 + 0{,}5\cdot 1{,}0^2 + 0{,}5\cdot 1{,}5^2$$

…und für die **Obersumme O_4**

$$O_4 = 0{,}5\cdot 0{,}5^2 + 0{,}5\cdot 1{,}0^2 + 0{,}5\cdot 1{,}5^2 + 0{,}5\cdot 2{,}0^2$$

(der Index an U_4 und O_4 gibt die Anzahl der Rechtecke an)



a) Rechtfertigen Sie die Rechenterme für O_4 und U_4 und berechnen Sie deren Wert.
b) Berechnen Sie O_5 und U_5 , O_6 und U_6 und O_7 und U_7 für f(x) auf dem Intervall [0;2].
c) Was kann man über die Werte von O_n und U_n sagen, wenn man O_n und U_n für immer größer werdende n berechnen würde. Hätten sie eine Vermutung für einen „exakten“ Wert?

Der Flächeninhalt zwischen der Funktion und der x-Achse wird mit einer **endlichen** Anzahl an Rechtecken natürlich **nur näherungsweise** und nicht exakt ausgeschöpft. Um den „exakten“ Wert zu erhalten (natürlich nur, wenn es ihn gibt) unterteilen wir das jeweilige Intervall in n gleich große (äquidistante) Teile, berechnen O_n und U_n und untersuchen, ob sich jeweils gleiche Zahlenwerte ergeben, wenn n gegen unendlich strebt ($n \to \infty$).

Zu $f(x) = x^2$ soll von 0 bis 2 mit n Rechtecken der Flächeninhalt näherungsweise nach oben und unten abgeschätzt werden: Für die **Obersumme** gilt nun: $O_n = \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots$

d) Vervollständigen und „vereinfachen“ Sie O_n so weit wie möglich.
e) Bestimmen und „vereinfachen“ Sie so weit wie möglich U_n.
f) Berechnen Sie O_n und U_n für die Intervalle [0;3], [0;4], … [0;a].
g) Berechnen Sie O_n und U_n für $f(x) = 2x^2, 3x^2, \ldots, x^3, 2x^3, 3x^3, \ldots, x^4, \ldots$ z.B. auf dem Intervall [1;5]. Erkennen Sie eine Regelmäßigkeit?