Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der männlichen Jugendlichen, die mit ihrem Gewicht zufrieden sind. X ist in (1) $B_{15;0,6}$-verteilt, in (2) und (3) $B_{100;0,6}$-verteilt.

(1) $P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4^{10}=2{,}45\ \%.$

(2) Man entnimmt der beigefügten Tabelle: $P(X\le 60)=53{,}8\ \%.$

(3) Mit der Tabelle ergibt sich: $P(X\le 60)-P(X\le 49)=52{,}1\ \%.$

Modelllösung b)

(1) Mit Hilfe der Regel von Bayes ergibt sich $p=\dfrac{0{,}3\cdot 0{,}4}{0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}7\cdot 0{,}5}=\dfrac{0{,}12}{0{,}47}\approx 25{,}53\ \%$.

Die für die Berechnung nötigen Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch mit Hilfe eines Baumdiagramms ermitteln.

(2) Es sei J das Ereignis „Ein befragter Jugendlicher ist ein Junge“ und R das Ereignis „Ein befragter Jugendlicher ist ein Raucher“. Dem Aufgabentext entnimmt man $P(R\cap J)=0{,}105$ und $P(R)=0{,}28$. Es gilt

$P(R\cap \bar{J})=P(R)-P(R\cap J)=0{,}28-0{,}105=0{,}175$. Damit ist

$$P_{\bar{J}}(R)=\frac{P(R\cap \bar{J})}{P(\bar{J})}=\frac{0{,}175}{0{,}7}\approx 0{,}25\,.$$

Als Lösungshilfe lässt sich auch hier ein Baumdiagramm erstellen.

Modelllösung c)

(1) Die Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n=100$ liefert $P(X\le 40)=0{,}0284$ und $P(X\le 39)=0{,}0176$ sowie $P(X\le 60)=0{,}9824$ und $P(X\le 59)=0{,}9716$. Demnach lautet die Entscheidungsregel, dass mindestens 40 und höchstens 60 Mädchen die Frage, ob sie mit ihrem Gewicht zufrieden sind, mit *ja* beantworten dürfen, um die Hypothese H_0 beizubehalten; andernfalls wird sie abgelehnt. Auch die Entscheidungsregeln „mindestens 40 und höchstens 59 Mädchen“ bzw. „mindestens 41 und höchstens 60 Mädchen“ werden als richtig gewertet, da sie die Anforderungen der Aufgabe erfüllen.

Die Entscheidungsregel „höchstens 41 und mindestens 59 Mädchen" kann nicht zur Vergabe der Höchstpunktzahl führen, da $P(41 \leq X \leq 59) = 94{,}31\,\% < 95\,\%$.

(2) Es handelt sich um einen Fehler 2. Art (β-Fehler). Grundlage ist die $B_{100;0,6}$-Verteilung. Man bestimmt $P(40 \leq X \leq 60) = 53{,}79\,\%$ bzw. $P(40 \leq X \leq 59) = 45{,}67\,\%$ bzw. $P(41 \leq X \leq 60) = 53{,}79\,\%$.

Modelllösung d)

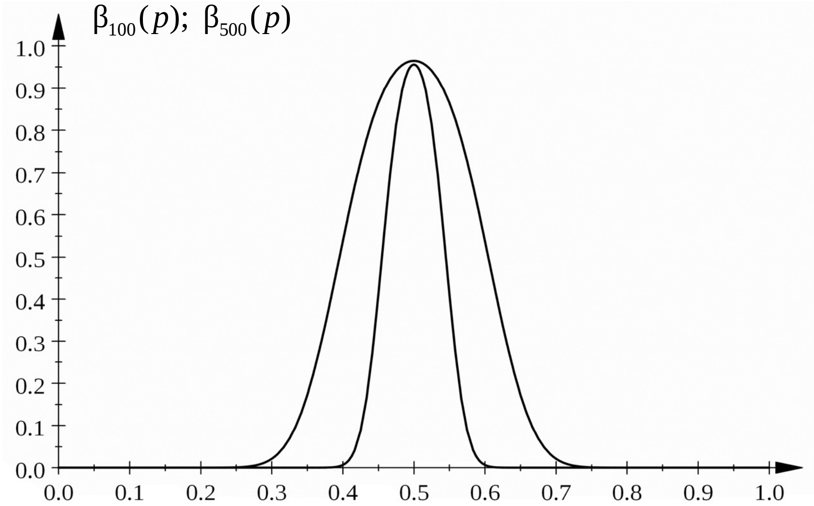
(1) Für $p \to 1$ gilt $\beta_{100}(p) \to 0$. Je mehr die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p von 0,5 abweicht, umso geringer ist die Wahrscheinlichkeit $\beta_{100}(p)$, dass die Anzahl der Mädchen, die mit ihrem Gewicht zufrieden sind, innerhalb des Annahmebereichs der Hypothese H_0 liegt. Dies lässt sich auch anhand der $B_{100;p}$-Summenverteilung erkennen, die für alle Werte von $p \geq 0{,}80$ für $P(X \leq 60)$ den Wert 0 aufweist.

Da die Wahrscheinlichkeit p_0 den Wert 0,5 hat, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art für $p = 0{,}5 - \delta$ genauso groß wie für $p = 0{,}5 + \delta$, $0 \leq \delta \leq 0{,}5$. Grund hierfür ist die Symmetrie der Binomialverteilung, die bei einer $B_{100;0,5+\delta}$-Verteilung für $P(40 \leq X \leq 60)$ denselben Wert aufweist wie bei einer $B_{100;0,5-\delta}$-Verteilung, wie sich auch anhand der beigefügten Summenverteilung für $n = 100$ erkennen lässt. Entsprechend verläuft der Graph achsensymmetrisch zur Geraden $p = 0{,}5$.

Da von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % ausgegangen wird, hat der Extrempunkt E die y-Koordinate $y_E = 0{,}9648$ bzw. $y_E = 0{,}9540$ (vgl. Aufgabenteil c). Auch die Angabe $y_E = 0{,}95$ wird als richtig akzeptiert.

(2) Für $n > 100$ liegt die relative Extremstelle des Graphen nach wie vor bei $p = 0{,}5$; auch die Symmetrie des Graphen zur Geraden $p = 0{,}5$ bleibt erhalten. Die Begründungen sind die gleichen wie unter (1). (Die Tatsache, dass sich mit zunehmendem n der Extremwert y_E immer mehr 0,95 nähert, muss zur Erlangung der Höchstpunktzahl nicht erklärt werden.)

Die Fläche unter dem Graphen zu $p \to \beta_n(p)$ ist allerdings deutlich kleiner als bei $p \to \beta_{100}(p)$. Für $n > 100$ liegt der Graph vollständig unter dem gegebenen Graphen, da die Macht des Tests größer geworden ist. Mögliche Darstellung der Graphen:



Folgender Sachverhalt kann vom Prüfling dargestellt werden, muss zur Erlangung der Höchstpunktzahl aber nicht genannt werden:
Der Graph steigt für $p < 0{,}5$ in der Nähe des Hochpunkts stärker, für $p > 0{,}5$ fällt er stärker. Dies liegt daran, dass mit zunehmendem Stichprobenumfang *n* die Intervalllänge des Annahmebereichs $[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma] = [0{,}5n - 1{,}96\sqrt{0{,}25n}; 0{,}5n + 1{,}96\sqrt{0{,}25n}]$ immer kleiner wird. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma)$ für den Fehler 2. Art für Werte von *p* nahe *p* = 0,5 entsprechend kleiner, was den Graphenverlauf von $\beta_n(p)$ erklärt. Alternativ lässt sich dieser Sachverhalt auch anhand des stärkeren Konvergierens von $\beta_n(p)$ gegen 0 für $p \to 1$ bzw. $p \to 0$ erklären.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass unter 15 männlichen Jugendlichen genau 5 mit ihrem Gewicht zufrieden sind.	3 (I)
2	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 männlichen Jugendlichen höchstens 60 mit ihrem Gewicht zufrieden sind.	3 (I)
3	(3) berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 männlichen Jugendlichen mindestens 50 und höchstens 60 mit ihrem Gewicht zufrieden sind.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) berechnet mit Hilfe der Regel von Bayes die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5 (II)
2	(2) entnimmt der Aufgabenstellung die Wahrscheinlichkeiten $P(R \cap J)$ und $P(R)$.	3 (II)
3	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{J}}(R)$.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) formuliert eine Entscheidungsregel.	6 (II)
2	(2) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) interpretiert den Graphenverlauf hinsichtlich des Verhaltens für $p \to 1$.	4 (II)
2	(1) begründet mit Hilfe der Symmetrie der Binomialverteilung, dass der Graph wegen $p_0 = 0{,}5$ symmetrisch zur Geraden $p = 0{,}5$ ist.	4 (III)
3	(1) begründet, dass $y_E = 0{,}95$ ist.	3 (II)
4	(2) vergleicht die beiden Graphenverläufe von $p \to F_n(p)$ und $p \to F_{100}(p)$.	5 (III)
5	(2) stellt die beiden Graphenverläufe in einem Koordinatensystem dar oder beschreibt deren Verlauf.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3 (I)			
2	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3 (I)			
3	(3) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet mit Hilfe …	5 (II)			
2	(2) entnimmt der Aufgabenstellung …	3 (II)			
3	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) formuliert eine Entscheidungsregel.	6 (II)			
2	(2) ermittelt die gesuchte …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert den Graphenverlauf …	4 (II)			
2	(1) begründet mit Hilfe …	4 (III)			
3	(1) begründet, dass $y_E = 0{,}95$ ist.	3 (II)			
4	(2) vergleicht die beiden …	5 (III)			
5	(2) stellt die beiden …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**19**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0