Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,175	0,175	0,175	0,175	0,1

(2) $E(X) = 0{,}2 + (2 + 3 + 4 + 5) \cdot 0{,}175 + 0{,}6 = 3{,}25$

und

$V(X) = 0{,}2 \cdot (-2{,}25)^2 + 0{,}175 \cdot ((-1{,}25)^2 + (-0{,}25)^2 + 0{,}75^2 + 1{,}75^2) + 0{,}1 \cdot 2{,}75^2$

$= 2{,}6875$

$\sigma_X \approx 1{,}64.$

Modelllösung b)

(1) Die Zufallsgröße Y zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten „6“.

$P(Y = 5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}0656.$

(2) Die Zufallsgröße Z zählt die Anzahl der Sechsen in n Würfen; Z ist $B_{100;0,1}$-verteilt.

$P(Z = 10) = \binom{100}{10} 0{,}1^{10}\, 0{,}9^{90} = 0{,}1319.$

(3) Z ist nun $B_{200;0,1}$-verteilt; $P(Z \geq 16) = 1 - P(Z \leq 15) = 1 - 0{,}1431 = 0{,}8569$.

(Tabelle der Binomialverteilung)

(4) Z ist nun $B_{350;0,1}$-verteilt;

$\mu_Z = 350 \cdot 0{,}1 = 35$ und $\sigma_Z = \sqrt{350 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{31{,}5} \approx 5{,}61 > 3$

$P(|Z - \mu_Z| \leq 1{,}5 \cdot \sigma_Z) = P(26{,}58 \leq Z \leq 43{,}42) = P(27 \leq Z \leq 43)$

$\approx \Phi((43 - \mu_Z + 0.5) / \sigma_Z) - \Phi((27 - \mu_Z - 0{,}5) / \sigma_Z)$

$= 2 \cdot \Phi(1{,}5145) - 1 = 0{,}8701$.

(Tabelle der Normalverteilung; die Lösung wird auch als korrekt betrachtet, wenn 26,58 und 43,42 in die Normalverteilung eingesetzt werden. Mit der Binomialverteilung erhält man als Wahrscheinlichkeit = 0,8711.)

Modelllösung c)

(1) Getestet werden die Hypothesen

$H_0: \ p \geq 1/6$ gegen $H_1: \ p < 1/6$.

[Eine im Übrigen konsistente Lösung bei entgegengesetzter Wahl der Hypothesen soll auch akzeptiert werden.]

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechsen in 2000 Würfen. Bei Annahme der Nullhypothese ist X $B_{2000;1/6}$-verteilt mit $\mu_X \approx 333{,}3$ und $\sigma_X \approx \sqrt{277{,}8} \approx 16{,}67 > 3$.

Die kritische Grenze k ist so zu bestimmen, dass $P_{1/6}(X < k) \leq 0{,}05$.

Für das 5 %-Signifikanzniveau ist das der Fall, wenn

$X < k = \mu_X - 1{,}64\sigma_X = 306$ (σ-Tabelle).

Es ergeben sich der Ablehnungsbereich $A = \{0, \ \ldots, 305\}$ und der Annahmebereich $\overline{A} = \{306, \ldots, 2000\}$.

Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, tatsächlich (mindestens) 1/6 beträgt, aber aufgrund des Würfelergebnisses von $p < 1/6$ (gefälschter Würfel) ausgegangen wird.

Ein Fehler 2. Art liegt dann vor, wenn man aufgrund des Würfelergebnisses annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine „6“ mindestens 1/6 beträgt, aber tatsächlich $p < 1/6$ ist.

(2) Ein Würfelergebnis von 307 Sechsen ist mit der Hypothese noch verträglich; H_o kann auf dem Signifikanzniveau 5 % nicht abgelehnt werden.

(3) Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

X ist jetzt $B_{2000;0,1}$-verteilt; $\mu_X = 200$ und $\sigma_X = \sqrt{180} \approx 13{,}42 > 3$.

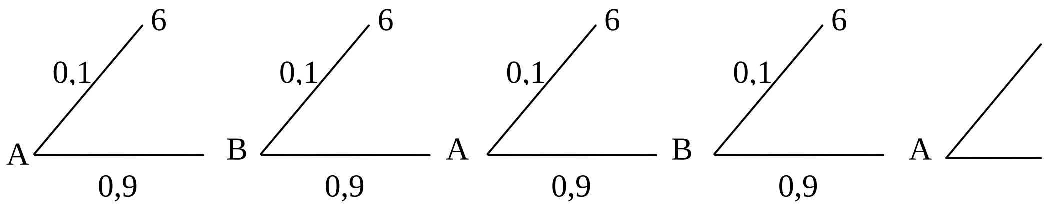
Mit der Normalapproximation ist

$P(X \geq 306) \approx 1 - \Phi\left((305 - \mu_X) / \sigma_X\right) = 1 - \Phi(7{,}82) \approx 0$.

Modelllösung d)

(1) A beginnt und hat gewonnen, sobald er eine „6“ gewürfelt hat.

Die Spielsituation lässt sich in einem Baumdiagramm z. B. so darstellen:



$P(G_A) = 0{,}1 + 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^6 \cdot 0{,}1 + \ldots$ und entsprechend

$P(G_B) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^5 \cdot 0{,}1 + \ldots$

$= 0{,}9\,(0{,}1 + 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^6 \cdot 0{,}1 + \ldots)$,

also $P(G_B) = 0{,}9 \cdot P(G_A)$.

[Das Ergebnis kann auch ohne Summenbildung begründet werden.]

(2) Das Spiel geht nicht endlos weiter, da schließlich einer von beiden eine „6“ würfelt.

Mit $P(G_B) + P(G_A) = 1$ erhält man

$$0{,}9 \cdot P(G_A) + P(G_A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}9 \cdot P(G_A) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(G_A) = \frac{10}{19} \approx 0{,}5263.$$

A hat eine etwas größere Gewinnchance als B, wenn er beginnt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.	3 (I)
2	(2) berechnet μ_X und σ_X .	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) berechnet $P(Y=5)$.	2 (I)
2	(2) bestimmt $P(Z=10)$.	3 (II)
3	(3) bestimmt $P(Z \geq 16)$.	3 (II)
4	(4) berechnet μ_Z und σ_Z und ermittelt $P(27 \leq Z \leq 43)$.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) nennt die Hypothesen und beschreibt die Zufallsgröße.	3 (I)
2	(1) ermittelt die kritische Grenze / den Ablehnungsbereich.	4 (II)
3	(1) beschreibt die Fehler 1. und 2. Art.	3 (II)
4	(2) entscheidet, die Hypothese H_o nicht abzulehnen.	3 (II)
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) stellt die Spielsituation in einem Baumdiagramm dar.	4 (II)
2	(1) zeigt $P(G_B) = 0{,}9 \cdot P(G_A)$.	6 (III)
3	(2) bestimmt $P(G_A)$.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeitsverteilung ...	3 (I)			
2	(2) berechnet μ_X und σ_X .	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $P(Y = 5)$.	2 (I)			
2	(2) bestimmt $P(Z = 10)$.	3 (II)			
3	(3) bestimmt $P(Z \geq 16)$.	3 (II)			
4	(4) berechnet μ_Z und σ_Z ...	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) nennt die Hypothesen ...	3 (I)			
2	(1) ermittelt die kritische....	4 (II)			
3	(1) beschreibt die Fehler ...	3 (II)			
4	(2) entscheidet, die Hypothese ...	3 (II)			
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Spielsituation ...	4 (II)			
2	(1) zeigt $P(G_B) = 0{,}9 \cdot P(G_A)$.	6 (III)			
3	(2) bestimmt $P(G_A)$.	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0