Potenzen mit ganzzahligen Exponenten:
Bei einer Potenz a^n nennt man a die **Basis** und n den **Exponenten**.

Für jede Zahl ($a \neq 0$) und jede natürliche Zahl n mit $n \geqq 2$ ist:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
$5^0 = 1$
$5^1 = 5$
$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
$10^{-4} = 0{,}0001$
$35\,000\,000 = 3{,}5 \cdot 10^7$
$0{,}00056 = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$

Wurzeln
Gilt für zwei Zahlen $a > 0$ und $x > 0$ $a = x^n$ (mit n aus $\mathbb{N}$, $n > 0$), so nennt man x die n-te Wurzel aus a und man schreibt $x = \sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[3]{8} = 2$, denn $2^3 = 8$

Der Term unter dem Wurzelzeichen heißt Radikand.
Zu jeder Zahl $a \geqq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n > 0$ gibt es genau eine n-te Wurzel von a.

$\left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = 3$

Potenzen mit rationalen Exponenten
Für $a \geqq 0$, p aus $\mathbb{Z}$ und q aus $\mathbb{N}$, $q \neq 0$, ist: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
Insbesondere gilt: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{43}{30}} = a \cdot a^{\frac{13}{30}}$
$= a \cdot \sqrt[30]{a^{13}}$

Potenzen mit irrationalen Exponenten
Ist $a > 0$ eine reelle Zahl und x eine irrationale Zahl, dann gibt es genau eine reelle Zahl a^x.
Diese Zahl a^x kann man mit einer Intervallschachtelung beschreiben.

Rechnen mit Potenzen und Wurzeln

Potenzgesetze
1. Gleiche Basis: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^p : a^q = a^{p-q}$; $a \neq 0$
2. Gleiche Exponenten: $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$; $a^p : b^p = (a:b)^p$; $b \neq 0$
3. Potenzen von Potenzen: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4} = 3^9$; $3^7 : 3^5 = 3^{7-5} = 3^2$
$4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3 = 20^3$;
$4^3 : 5^3 = (4:5)^3 = 0{,}8^3$
$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$

Sind p und q ganzzahlige Exponenten, so gelten die Gesetze für alle reellen Zahlen a ($a \neq 0$); in allen anderen Fällen muss $a \geqq 0$ sein.

$\left[2a^p + 3\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q\right]^2 - 25(a^2)^p$
$= [2a^p + 3a^p]^2 - 25a^{2p}$
$= [5a^p]^2 - 25a^{2p}$
$= 25a^{2p} - 25a^{2p} = 0$

Beachte:
Klammern werden zuerst ausgerechnet.
Innerhalb von Klammern oder wenn Klammern fehlen, gilt:
Potenzrechnung vor Punktrechnung; Punktrechnung vor Strichrechnung.

Wurzelgesetze:
1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$

1 Schreibe in der Dezimalschreibweise.
a) 10^{-7} b) $4 \cdot 10^{13}$ c) $1{,}7 \cdot 10^2$ d) $845 \cdot 10^{-5}$ e) $0{,}12 \cdot 10^{-6}$

2 Schreibe als Produkt aus einer Dezimalzahl mit einer Ziffer ($\neq 0$) vor dem Komma und einer Zehnerpotenz.
a) $873 \cdot 10^6$ b) $0{,}276 \cdot 10^{-3}$ c) $93\,400\,000$ d) $0{,}076\,000$ e) $67{,}67 \cdot 10^{-7}$

3 Wie viele Sekunden vergehen in 1 Milliarde Jahre (ohne Schaltjahre u. ä.)?

4 Schreibe als Potenz mit einer möglichst kleinen natürlichen Zahl als Basis.
a) 250 000; 16 900; 256 000 000 000 000 b) 1024; 4096 c) 3125; 16 807

5 Vereinfache
a) $x^{\frac{7}{11}} \cdot x^{\frac{3}{22}}$ b) $z^{\frac{6}{13}} : z^{\frac{7}{26}}$ c) $(3s)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{(9s)^{\frac{1}{3}}}$ d) $(4a)^{-3r} : (7a)^{-6r}$

6 Berechne
a) $4 \cdot 2^3$ b) $0{,}7^{-3} \cdot 686$ c) $5 \cdot 7^3 \cdot 3 \cdot 49^{-6}$ d) $(12{,}5 \cdot 10^{-2} + 35 \cdot 10^{-3}) \cdot 2^4$

7 Vereinfache
a) $(a-b)^2(a^2+b^2-2ab)$ b) $\frac{25a^r - 625a}{75a^r}$ c) $\frac{x^{s-1}}{x^{1+s}} - \frac{1}{x^2}$ d) $\frac{1-k^{2x-1}}{k^{x-1}} + (k^{-x})^{-1}$

8
a) $b^{t+h} \cdot (s-r) - b^{t+h} \cdot s + b^{t+h} \cdot r + (b^t + b^h)(s-r)$ b) $x^{g+h} \cdot (t-r)^4 + x^{g+h} \cdot t + x^{g+h} \cdot r - (x^g \cdot x^h)(r+t)$

9
a) $\frac{a^{-4}b^5}{x^{-3}y^{-2}} \cdot \frac{x^{-2}y^{-1}}{a^{-3}b^6}$ b) $\frac{x^2y^{-5}}{a^{-3}b^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}b}{x^{-2}y^{-7}}$ c) $\frac{p^3q^{-2}}{r^{-4}s^{-5}} : \frac{r^{-6}s^{-1}}{p^{-1}q^2}$ d) $\frac{3x^{-2}y}{2a^2b} : \frac{x^4y^{-3}}{6ab^2}$
e) $\left(\frac{x^{-4}y^{-3}}{z^4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{z^7}{xy^3}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^{-7}}\right)^{-4} : \left(\frac{ab^{-2}}{c^7}\right)^{-2}$ g) $\frac{((a+b) \cdot (a-b))^{-5}}{(a^2-b^2)}$ h) $\frac{((a+b)^3)^4}{(a^2+2ab+b^2)^6}$

10
a) $\frac{(81a^{-6}b^{10})^{-4}}{(27a^8b^{-14})^{-3}}$ b) $\frac{(a-b)^4}{(a^3-a^2b)^6}$ c) $\frac{3}{(g^5-h^5)} + \frac{3}{(h^5+g^5)}$
d) $\frac{42 \cdot (k^6-m^6)}{3k^3-3m^3} - \frac{6(k^3)^2+12(m^3k^3)^2+6(m^2)^3}{6k^3+6m^3}$ e) $\frac{(x-y)^7}{x^2-y^2} - \frac{(x-y)^6}{x+y}$

11
a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{4^9}}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{4096}}$ c) $\sqrt[5]{32 \cdot \sqrt[3]{243}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16}}$

12 Mache den Nenner rational.
a) $\frac{1}{\sqrt{u-v}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2u+3v}}$ c) $\frac{7a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ d) $\frac{2k}{\sqrt{2k}+4\sqrt{3m}}$
e) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{7}{13}}$ g) $\frac{2\sqrt{y}-3\sqrt{z}}{2\sqrt{y}+3\sqrt{z}}$ h) $\frac{1}{1-\sqrt{1-g}}$

13 Radiziere teilweise.
a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt[5]{486}$ c) $\sqrt[4]{16 \cdot (a-b)^5}$
d) $\sqrt[3]{(4a^2-12ab+9b^2) \cdot (2a-3b)^2}$ e) $\sqrt[3]{(a^2-4) \cdot (a^2+4a+4)}$