Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9} = 0{,}5 \Rightarrow t = 10 \cdot \ln(2{,}5) + 9 \approx 18{,}2$

Nach 18 Tagen und fast 5 Stunden ist die Pflanze 50 cm hoch. Die Umrechnung in Stunden wird nicht verlangt.

Modelllösung b)

Der gesuchte Zeitpunkt entspricht einer Wendestelle des Graphen, nämlich einer Stelle mit der größten Steigung. Da jedoch für eine Exponentialfunktion wie der vorliegenden die Steigung mit wachsendem *t* ebenfalls stetig zunimmt, existiert in diesem Fall keine Wendestelle. Demnach erreicht für *t* = 20 der Graph die größte Steigung und somit der Strauch die größte Wachstumsgeschwindigkeit. Da die Ableitung der Funktion der Pflanzenhöhe h' der Wachstumsgeschwindigkeit entspricht, muss also $h'(20)$ berechnet werden:

$h'(t) = 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$

$h'(20) = 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{0{,}1 \cdot 20 - 0{,}9} \approx 0{,}060$.

Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag. Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion *h* nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

Modelllösung c)

Die Höhe des Strauches kann berechnet werden, indem zu der Höhe nach 20 Tagen ein durch Integration der Funktion *z* mit variabler oberer Grenze ermittelter Term addiert wird:

$$h_2(t) \approx 0{,}601 + \int_{20}^{t} 0{,}02 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1} \mathrm{d}u = 0{,}601 + \left[-0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1}\right]_{20}^{t} \approx 1{,}202 - 0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$$

Da der Teilterm im Exponenten der Funktion mit steigendem *t* gegen minus Unendlich strebt, wird der Strauch nicht höher als ca. 1,20 Meter.

Modelllösung d)

(1) Aus den Informationen ergeben sich die Koordinaten zweier Punkte, die auf dem Graphen von f_1 mit G = 1,2 liegen.

$P_1(0/0,08)$ und $P_2(20/0,6)$ führen zu den Gleichungen (I) und (II):

(I) $f_1(0)=0,08=1,2-c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=1,2-0,08=1,12$.

Durch Einsetzen in Gleichung (II) ergibt sich:

(II) $f_1(20)=0,6=1,2-1,12\cdot e^{-20\cdot k} \Leftrightarrow k=-\frac{1}{20}\cdot\ln\left(\frac{15}{28}\right)\approx 0,0312$.

Der Funktionsterm lautet: $f_1(t)=1,2-1,12\cdot e^{-0,0312\cdot t}$.

(2) Durch Einsetzten von t = 0 und t = 20 in $f_2(t)=\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\cdot t}}$ ergibt sich:

$$f_2(0)=\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^0}=0,08$$

$$f_2(20)=\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\cdot 20}}\approx 0,60.$$

Die Modellfunktion f_2 gibt zu den Zeitpunkten t = 0 und t = 20 die gemessenen Höhen des Strauches korrekt wieder.

Auf lange Sicht wird die Höhe eines Strauches, die mit der Modellfunktion f_2 beschrieben wird, die Höhe von 1,2 m nicht überschreiten, da für $t\to\infty$ der Teilterm $e^{-0.132\cdot t}\to 0$ gegen Null strebt. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{0,096}{0,08+1,12\cdot e^{-0,132\cdot t}}\to\frac{0,096}{0,08}=1,2\cdot$$

(3) Der Graph von f_1 verändert sein Krümmungsverhalten im gesamten Beobachtungszeitraum nicht. Inhaltlich bedeutet das konkret, dass das Pflanzenwachstum, das der Graph von f_1 beschreibt, über den gesamten Beobachtungszeitraum kleiner wird.

Der Graph von f_2 verändert sein Krümmungsverhalten im Wendepunkt, der etwa bei t = 20 liegt. Bis zu diesem Zeitpunkt nimmt das Wachstum des Strauches beinahe exponentiell zu, erst nach dem 20. Tag wird ein sinkendes Pflanzenwachstum beschrieben. Das legt die Vermutung nahe, dass die Strauchhöhe h in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen über den gesamten Beobachtungszeitraum eher durch ein Wachstumsmodell wie in f_2 beschrieben werden kann.

(4) Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion $d = h - f$ definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall [0;20] berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.

Alternative Lösungswege sind denkbar.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet den Zeitpunkt, zu dem der Strauch eine Höhe von 50 cm hat.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die erste Ableitung.	3 (I)
2	begründet, warum keine Wendestelle existiert.	3 (II)
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit an der Stelle 20.	2 (I)
4	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Term für die Höhe des Strauches zum Zeitpunkt t.	5 (III)
2	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
3	gibt die maximale Höhe des Strauches an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) bestimmt den Funktionsterm von f_1.	5 (II)
2	(2) berechnet die Pflanzenhöhe zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 20$ mit der Modellfunktion f_2.	4 (I)
3	(2) vergleicht die berechneten Werte mit den beobachteten Werten.	2 (II)
4	(2) bestimmt die maximale Höhe des Strauchs anhand von f_2.	3 (II)
5	(3) begründet die Eignung von f_2 als Modellfunktion für die Strauchhöhe.	5 (II)
6	(4) beschreibt ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen f und h im Intervall [0;20].	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Zeitpunkt …	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (5) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die erste …	3 (I)			
2	begründet, warum keine …	3 (II)			
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit …	2 (I)			
4	begründet anhand der …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Term …	5 (III)			
2	begründet anhand der …	3 (II)			
3	gibt die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Funktionsterm …	5 (II)			
2	(2) berechnet die Pflanzenhöhe …	4 (I)			
3	(2) vergleicht die berechneten …	2 (II)			
4	(2) bestimmt die maximale …	3 (II)			
5	(3) begründet die Eignung …	5 (II)			
6	(4) beschreibt ein Verfahren …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (24) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**24**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.