



Name: _____

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit $h(t) = 0,2 \cdot e^{0,1t-0,9}$ (t in Tagen, $h(t)$ in Metern) beschrieben. Diese Pflanze hat zum Zeitpunkt des Auspflanzens eine Höhe von 8 cm und ist am Ende des 20. Tages ($t = 20$) auf eine Höhe von etwa 60 cm gewachsen. Vom Beginn des 21. Tages an verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Zuwachsrate bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit $z(t) = 0,02 \cdot e^{-0,1t+3,1}$.

- a) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat. (5 Punkte)
- b) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt innerhalb der ersten zwanzig Tage ($0 \leq t \leq 20$), an dem die Pflanze am schnellsten wächst. Berechnen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.
Begründen Sie, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann. (11 Punkte)
- c) Ermitteln Sie einen Term $h_2(t)$, der die Höhe des Strauches nach t Tagen ($t > 20$) beschreibt.
Begründen Sie anhand dieses Terms, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und geben Sie die maximale Höhe des Strauches an.
[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1t+3,1}$, $t > 20$] (10 Punkte)



Name: _____

Die *Abbildung 1* auf Blatt 3 zeigt den Graphen, der die Höhe des Strauches in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen beschreibt. Er ist aus den Funktionen h ($0 < t \leq 20$) und h_2 ($t > 20$) zusammengesetzt.

d) Eine Funktion f soll nun die Pflanzenhöhe für den gesamten Zeitraum, also über die ersten zwanzig Tage hinaus, möglichst zutreffend modellieren.

- (1) Da der Strauch nicht höher als ungefähr 1,2 m wird, muss die Modellfunktion beschränkt sein. Zunächst wird eine Modellfunktion vom Typ f_1 mit $f_1(t) = G - c \cdot e^{-k \cdot t}$ gewählt. Dabei ist G mit $G = 1,2$ die obere Grenze, die die Höhe der Pflanze auf lange Sicht nicht überschreitet.

Bestimmen Sie die Parameter c und k so, dass der Strauch beim Auspflanzen und am 20. Tag die beobachteten Höhen von 0,08 m bzw. von 0,60 m besitzt.

- (2) Ein alternativer Ansatz führt zu einer Modellfunktion f_2 mit

$$f_2(t) = \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-0,132 \cdot t}}.$$

Berechnen Sie die Höhen des Strauches zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 20$ und vergleichen Sie diese mit den tatsächlichen Werten.

Zeigen Sie, dass die mit der Modellfunktion f_2 beschriebene Pflanzenhöhe den Wert 1,2 m tatsächlich nicht überschreitet.

- (3) *Begründen Sie anhand des Krümmungsverhaltens, welche der beiden Modellfunktionen f_1 und f_2 eher geeignet ist, die Strauchhöhe (s. *Abbildung 1*) in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen zu beschreiben (vgl. *Abbildungen 1, 2 und 3* auf Blatt 3).*
- (4) *Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen einer (differenzierbaren) Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall $[0; 20]$.*

(24 Punkte)



Name: _____

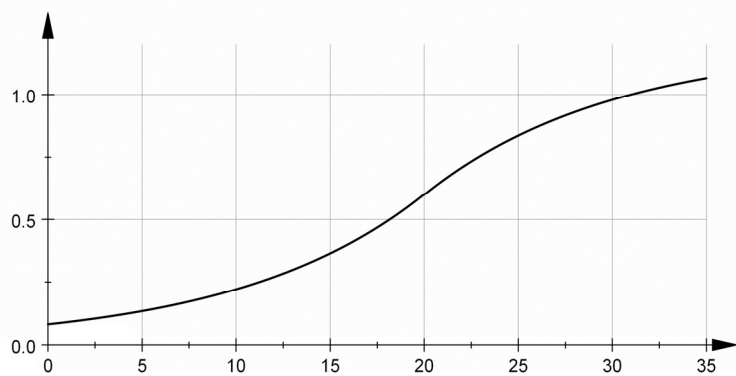


Abbildung 1:
Strauchhöhe h (einschließlich h_2)
in Metern in Abhängigkeit von der
Zeit t in Tagen

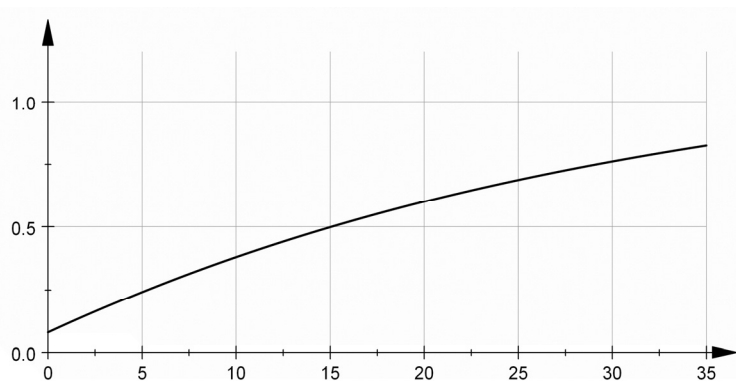


Abbildung 2:
Modellfunktion f_1 zur Beschreibung
der Strauchhöhe in Metern in Ab-
hängigkeit von der Zeit t in Tagen

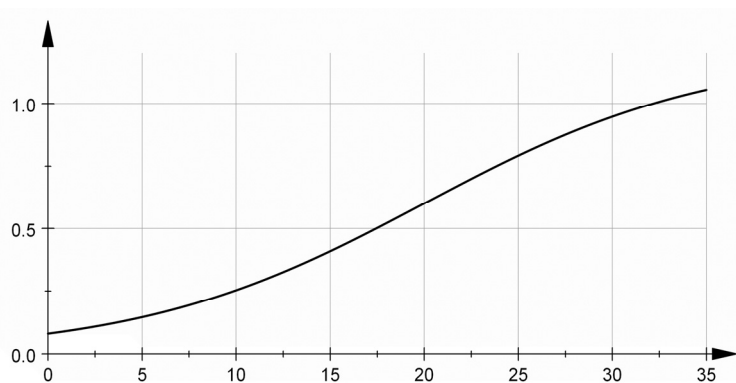


Abbildung 3:
Modellfunktion f_2 zur Beschreibung
der Strauchhöhe in Metern in Ab-
hängigkeit von der Zeit t in Tagen

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung