Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Der Sachkontext erfordert die Nachweise, dass der Graph von $f_{\mathrm{a,b}}$ streng monoton steigend ist und für $t \to \infty$ einen Grenzwert besitzt.

(1) $f'_{\mathrm{a,b}}(t) = ab \cdot e^{-b \cdot t}$

Da $e^{-b \cdot t} > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ und $ab > 0$ $(a, b > 0)$ ist, folgt, dass $f'_{a,b}(t) > 0$ für $t \geq 0$ gilt.

$\Rightarrow$ Der Graph von $f_{\mathrm{a,b}}$ ist streng monoton steigend.

Für $t \to \infty$ gilt: $e^{-b \cdot t} \to 0$. $\Rightarrow f_{\mathrm{a,b}}(t) \to a$

Langfristig stellt sich ein Medikamentenspiegel von ungefähr a $\mathrm{mg/l}$ im Blut ein.

(2) Eine Vergrößerung von *b* bedeutet eine größere Steilheit des Graphen an gleichen Stellen und eine schnellere Annäherung an die theoretische Endkonzentration.
Beispielsweise bedeutet eine Verdopplung des Wertes von *a* eine Verdopplung der Wirkstoffkonzentration zu gleichen Zeitpunkten. Außerdem stellt sich langfristig ein Medikamentenspiegel von ungefähr a $\mathrm{mg/l}$ im Blut ein (siehe a) (1)).

(3) 11 Uhr $\hat{=}$ $t = 2$

Also gilt: $f_{\mathrm{a}}(2) = 5{,}902$ bzw. $a(1 - e^{-0{,}25 \cdot 2}) = 5{,}902 \Leftrightarrow a = \dfrac{5{,}902}{1 - e^{-0{,}5}} = 14{,}999... \approx 15$

(4) $f(3) = 15 \cdot (1 - e^{-0{,}75}) \approx 7{,}91$

Um 12 Uhr beträgt die Wirkstoffkonzentration im Blut ungefähr $7{,}91\ \mathrm{mg/l}$.

Modelllösung b)

(1) Für $t \geq 16$ gilt dann:

$$\begin{aligned} k(t) &= f(16)\cdot e^{-0,25\cdot(t-16)} \\ &= f(16)\cdot e^{-0,25\cdot t}\cdot e^{4} \\ &= 15\cdot(1-e^{-4})\cdot e^{4\cdot}\cdot e^{-0,25\cdot t} \\ &\approx 803,972...\cdot e^{-0,25\cdot t} \\ &\approx 804\cdot e^{-0,25\cdot t} \end{aligned}$$

(2) Der Term $k'(t)$ beschreibt die Änderung der Wirkstoffkonzentration.

Es gilt: $k'(t) = -201\cdot e^{-0,25\cdot t}$

(3) Der Prozentsatz lässt sich beispielsweise aus

$\dfrac{|k'(20)|}{|k'(19)|} = \dfrac{201\cdot e^{-0,25\cdot 20}}{201\cdot e^{-0,25\cdot 19}} = e^{-0,25} \approx 0,779$ ermitteln.

$\Rightarrow$ Die Wirkstoffkonzentration nimmt in jeder Stunde um ca. 22 % ab.

Alternativ kann auch allgemein argumentiert werden:

$$\frac{|k'(t+1)|}{|k'(t)|} = \frac{201\cdot e^{-0,25\cdot(t+1)}}{201\cdot e^{-0,25\cdot t}} = e^{-0,25} \approx 0,779\,.$$

$\Rightarrow$ Die Wirkstoffkonzentration nimmt in jeder Stunde um ca. 22 % ab.

[In diesem Fall wird die in der Aufgabenstellung vorausgesetzte prozentuale Abnahme in jeder Stunde zusätzlich bewiesen.]

Modelllösung c)

(1) Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration von $8\ \mathrm{mg/l}$ (erstmals) erreicht wird:

$f(t_1) = 8$, d. h.

$$15 \cdot (1 - e^{-0{,}25 \cdot t_1}) = 8 \Leftrightarrow e^{-0{,}25 \cdot t_1} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow t_1 = -4 \cdot \ln\frac{7}{15} = 3{,}048...$$

Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration wieder auf $8\ \mathrm{mg/l}$ abgesunken ist:

$k(t_2) = 8$, d. h.

$$804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t_2} = 8 \Leftrightarrow e^{-0{,}25 \cdot t_2} = \frac{2}{201} \Leftrightarrow t_2 = -4 \cdot \ln\frac{2}{201} = 18{,}440...$$

Der gesuchte Zeitraum ergibt sich aus:

$t_{\mathrm{D}} = t_2 - t_1 = 15{,}392...\ \mathrm{h} = 15\ \mathrm{h}\ 23{,}52...\ \mathrm{min} \approx 15\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$.

(2) Es gilt:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} f(t)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} k(t)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} 15 \cdot \left(1 - e^{-0{,}25 \cdot t}\right)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(t + 4 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\right)\right]_0^{16} + \left[-3216 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\right]_{16}^{24}\right)\\
&= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(16 + 4 \cdot e^{-4}\right) - 15 \cdot 4\right] + \left[-3216 \cdot \left(e^{-6} - e^{-4}\right)\right]\right)\\
&\approx 9{,}668\ \mathrm{mg/l}.
\end{aligned}$$

[Wenn man die Teilergebnisse zwischendurch rundet, kann auch ein leicht abweichendes Ergebnis herauskommen. Das sollte ebenfalls als korrekt gewertet werden.]

(3) m gibt die mittlere Wirkstoffkonzentration des Medikaments in den ersten 24 Stunden an, d. h. im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).

Modelllösung d)

Der Ansatz $f_{\text{a,b}}(t) = a \cdot (1 - e^{-b \cdot t})$ führt auf die Bedingungen

(1) $f_{\text{a,b}}(1) = a \cdot (1 - e^{-b}) = 3{,}6$ und

(2) $f_{\text{a,b}}(1) = a \cdot (1 - e^{-2 \cdot b}) = 7{,}2$.

Es folgt: $\left| \begin{matrix} a \cdot (1 - e^{-b}) = 3{,}6 \\ a \cdot (1 - e^{-2 \cdot b}) = 7{,}2 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} a = \dfrac{3{,}6}{1 - e^{-b}} \\ a = \dfrac{7{,}2}{1 - e^{-2 \cdot b}} \end{matrix} \right|$.

$\Rightarrow 2(1 - e^{-b}) = 1 - e^{-2 \cdot b} \Leftrightarrow e^{-2 \cdot b} - 2e^{-b} + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^{-b} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-b} = 1 \Leftrightarrow b = 0$

Da aber (auch sinnvollerweise) $b > 0$ gelten soll, ist der vorgeschlagene Ansatz in diesem (speziellen) Fall nicht möglich.

[Wer nicht auf die Auflösung durch die binomische Formel kommt, sollte nicht mehr als 2 Punkte verlieren.]

Alternativ könnte beispielsweise auch allgemein argumentiert werden:

$f_{\text{a,b}}(t) = a \cdot (1 - e^{-b \cdot t}) \wedge f_{\text{a,b}}(2t) = a \cdot (1 - e^{-2b \cdot t})$ $(t, b, f_{\text{a,b}}(t) > 0)$

$\Rightarrow \dfrac{f_{\text{a,b}}(2t)}{f_{\text{a,b}}(t)} = \dfrac{1 - e^{-2bt}}{1 - e^{-bt}} = 1 + e^{-bt} < 2$ $(t > 0)$ – Widerspruch zu den gegebenen Werten $\Rightarrow$ …

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt rechnerisch, dass die Funktion $f_{\text{a,b}}$ streng monoton steigend ist.	4
2	(1) zeigt, dass die Funktion „langfristig“ auf einen festen Wert zustrebt.	2
3	(2) beschreibt die Bedeutung des Parameters *a* im Sachzusammenhang.	2
4	(2) beschreibt die Bedeutung des Parameters *b* im Sachzusammenhang.	2
5	(3) berechnet den Parameterwert von *a*.	3
6	(4) berechnet $f(3)$.	2
7	(4) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass $k(t) = 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.	5
2	(2) gibt an, dass $k'(t)$ die Änderung der Wirkstoffkonzentration beschreibt, und berechnet $k'(t)$.	2
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.	7
2	(2) bestimmt den Wert von *m*.	6
3	(3) interpretiert den Wert von *m* im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	untersucht, ob der zu Beginn der Aufgabe gewählte Ansatz für die Beschreibung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut auch in diesem Fall sinnvoll ist.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	4			
2	(1) zeigt, dass die …	2			
3	(2) beschreibt die Bedeutung …	2			
4	(2) beschreibt die Bedeutung …	2			
5	(3) berechnet den Parameterwert …	3			
6	(4) berechnet $f(3)$.	2			
7	(4) interpretiert den Wert …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass $k(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ …	5			
2	(2) gibt an, dass …	2			
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Zeitspanne …	7			
2	(2) bestimmt den Wert…	6			
3	(3) interpretiert den Wert …	3			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht, ob der …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.