



Name: _____

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Medikament wird über eine (intravenöse) Dauerinfusion dem Körper kontinuierlich und gleichmäßig zugeführt. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut steigt dabei kontinuierlich an und strebt bei „langfristiger Infusion“ auf eine „Endkonzentration“ zu.

a) (1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion $f_{a,b}$ mit der Funktionsgleichung

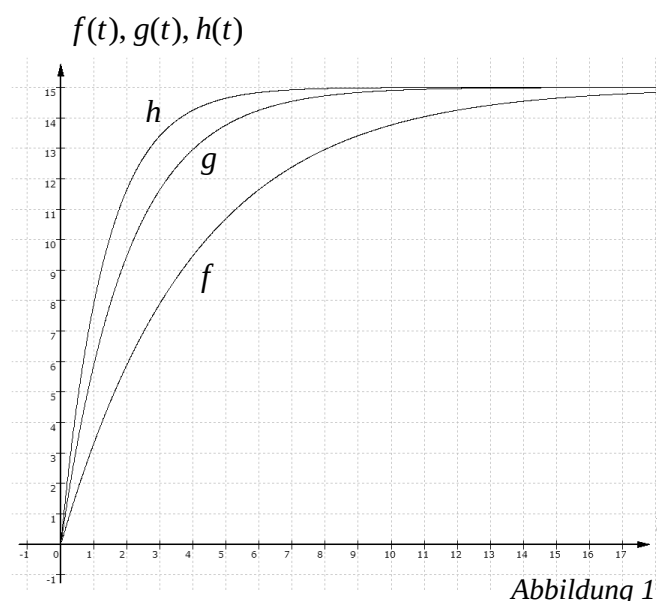
$$f_{a,b}(t) = a \cdot (1 - e^{-bt}) \text{ für } t \geq 0 \text{ (} a, b > 0 \text{)}$$

die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut angemessen beschreibt, d. h., dass die Funktion die beiden oben im Text genannten Kriterien erfüllt.

(t in Stunden; $f_{a,b}(t)$ in mg/l)

Die Graphen von f ($a = 15$, $b = 0,25$), g ($a = 15$, $b = 0,5$) und h ($a = 15$, $b = 0,75$) sind in *Abbildung 1* dargestellt.

(t -Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$ -, $g(t)$ -, $h(t)$ -Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)





Name: _____

- (2) *Beschreiben Sie die Bedeutung von a und b im Sachzusammenhang. Nutzen Sie dazu den Funktionsterm von $f_{a,b}$ und die drei Beispielgraphen.*

Für die folgenden Aufgabenteile von a) und die Teilaufgaben b) und c) ist nun $b = 0,25$.

Eine Infusion wird am 15. April um 9 Uhr ($t = 0$) begonnen.

Um 11 Uhr wird eine Wirkstoffkonzentration des Medikaments von 5,902 mg/l im Blut gemessen.

- (3) *Berechnen Sie den Parameterwert von a in der Funktionsgleichung von $f_{a,0,25}$, die diesen zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration des Medikaments modelliert.*

Im Folgenden soll die Wirkstoffkonzentration durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t})$ modelliert werden.

- (4) *Berechnen Sie $f(3)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(17 Punkte)

Wenn die Infusion nach t_E Stunden abgebrochen wird, nimmt die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut ab. Für die Modellierung des Abbaus der Wirkstoffkonzentration wird angenommen, dass die Abnahme unmittelbar nach Abbruch der Infusion beginnt. Die Wirkstoffkonzentration kann jetzt durch die Funktion k mit der Funktionsgleichung

$$k(t) = f(t_E) \cdot e^{-0,25 \cdot (t - t_E)} \quad (t \geq t_E) \text{ beschrieben werden.}$$

Um 1 Uhr des nächsten Tages wird die Infusion abgebrochen.

- b) (1) *Zeigen Sie, dass $k(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.*

Der Graph von k ist in *Abbildung 2* dargestellt.

(t -Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $k(t)$ -Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

- (2) *Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Änderung der Wirkstoffkonzentration für $t > 16$.*

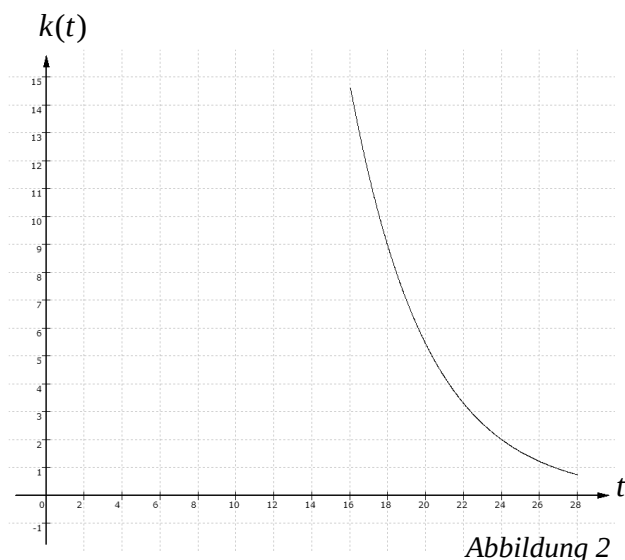
- (3) *In jeder Stunde nimmt der Betrag der Änderung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments um denselben Prozentsatz ab.*

Bestimmen Sie diesen Prozentsatz.

(10 Punkte)



Name: _____



- c) (1) Medizinische Untersuchungen haben ergeben, dass das Medikament nur wirksam ist, wenn die Wirkstoffkonzentration im Blut mindestens 8 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

(2) Bestimmen Sie $m = \frac{1}{24} \left[\int_0^{16} f(t) dt + \int_{16}^{24} k(t) dt \right]$.

- (3) Interpretieren Sie den Wert m im Sachzusammenhang. (16 Punkte)

- d) Bei einem anderen Medikament werden bei einer intravenösen Dauerinfusion 1 Stunde nach Beginn der Infusion 3,6 mg/l und nach 2 Stunden 7,2 mg/l im Blut gemessen.

Untersuchen Sie, ob der in Aufgabenteil a) vorgestellte Ansatz für die Beschreibung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut auch in diesem Fall sinnvoll ist.

[Tipp: Beachten Sie $e^{-2b} = (e^{-b})^2$.] (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung