Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$f_a(t) = \frac{a}{60}\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$

Es gilt $f_a'(t) = \frac{a}{60}\left(\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600} = \frac{a}{1200}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600} = \frac{1}{600}\left(\frac{a}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - 1\right)$,

$f_a''(t) = -\frac{a}{24000}e^{-\frac{1}{20}t}\,.$

Für eine lokale Maximalstelle t_{m} gilt:

$$\begin{aligned} f_a'(t_{\mathrm{m}}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{a}{2}e^{-\frac{1}{20}t_m} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}t_m} = \frac{2}{a} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{20}t_m = \ln\left(\frac{2}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

[Für $a > 2$ ist $t_{\mathrm{m}} > 0$.] Da $f_a''(t) < 0$ ist für $a > 2$ und für alle $t \in \mathbb{R}$, ist der Funktionsgraph von f_a rechtsgekrümmt. Somit hat die Funktion f_a an der Stelle $t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ ihr globales Maximum.

Da die Logarithmusfunktion streng monoton steigt, ist t_{m} umso größer, je größer a ist.

Je größer die Menge des getrunkenen Alkohols ist, desto später wird das Maximum der Blutalkoholkonzentration erreicht.

Modelllösung b)

(1) Für $a = 20$ ist [$t_m = 20\ln(10) \approx 46{,}05$ und] $f_{20}\left(20\ln(10)\right) = \frac{3}{10} - \frac{\ln(10)}{30} \approx 0{,}223$.

Die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson [wird 46 Minuten] nach dem Leeren des Glases [erreicht und] beträgt ca. 0,22 Promille.

(2)
$$F(t) = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t \right) dt$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(t + 20e^{-\frac{1}{20}t} \right) - \frac{1}{1200}t^2 + c$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(t - \frac{1}{400}t^2 + 20e^{-\frac{1}{20}t} \right) + c$$

(3) $\frac{F(140) - F(0)}{140} \approx 0{,}169$ [Promille].

Dieser Ausdruck gibt die mittlere Blutalkoholkonzentration innerhalb des betrachteten 140 Minuten langen Zeitintervalls an.

(4) $f(140) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - e^{-7}\right) - \frac{140}{600} \approx 0{,}100$.

Nach 140 Minuten beträgt die Blutalkoholkonzentration ca. 0,100 Promille.

Modelllösung c)

(1) $h(t)=\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 140 \\ g(t), & t > 140 \end{cases}$ mit $g(t)=u\cdot e^{-v\cdot t}$, $u>0$, $v>0$.

Die Funktion *h* ist an der Stelle $t=140$ genau dann differenzierbar, wenn gilt:

$g(140)=f(140)$ und $g'(140)=f'(140)$.

$g(140)=f(140) \Leftrightarrow \quad (*) \quad u\cdot e^{-140v}=f(140)$

Es gilt: $g'(t)=-v\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}$ und $f'(t)=\frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t}-\frac{1}{600}$ (s. Teilaufgabe a).

$g'(140)=f'(140) \Leftrightarrow \quad (**) \quad -u\cdot v\cdot e^{-140v}=\frac{1}{60}e^{-7}-\frac{1}{600}$

Division der Gleichung (**) durch die Gleichung (*) ergibt

$v=\frac{1}{f(140)}\cdot\left(\frac{1}{600}-\frac{1}{60}e^{-7}\right)\approx 0{,}01657$. Einsetzen in (*) ergibt $u=\frac{f(140)}{e^{-140v}}\approx 1{,}01357$.

(2) Die Funktion *h* ist genau dann an der Stelle $t=140$ zweimal differenzierbar, wenn gilt:

$f''(140)=g''(140)$. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, da für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt:

$f''(t)=-\frac{1}{1200}e^{-\frac{1}{20}t}<0$ und $g''(t)=v^2\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}>0$. Daher ist die Funktion *h* an der Stelle $t=140$ nicht zweimal differenzierbar.

(3) Die durch die Funktion *h* beschriebene Blutalkoholkonzentration kann nur im durch die Teilfunktion *f* abgedeckten Zeitintervall [0; 140] steigen, da die für $t>140$ verwendete Teilfunktion *g* wegen $g'(t)=-v\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}<0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ streng monoton fällt.

Da der Graph von *f* wegen $f''(t)=-\frac{1}{1200}e^{-\frac{1}{20}t}<0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ rechtsgekrümmt ist, ist seine Steigung an der linken Randstelle $t=0$ des betrachteten Zeitintervalls am größten: $f'(0)=\frac{1}{60}-\frac{1}{600}=0{,}015$ [Promille pro Minute].

Da der Graph von *f* für $t\le 140$ rechtsgekrümmt und der Graph von *g* für $t>140$ linksgekrümmt ist ($g''(t)=v^2\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$), nimmt die durch die Funktion *h* beschriebene Blutalkoholkonzentration zum Zeitpunkt $t=140$ am schnellsten ab, und zwar mit $f'(140)=\frac{1}{60}e^{-7}-\frac{1}{600}\approx -0{,}00165$ Promille pro Minute (vgl. (1)).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die erste und zweite Ableitung der Funktion f_a.	3
2	bestimmt die globale Maximalstelle t_m der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.	6
3	begründet den Einfluss des Parameters a auf die Lage der Maximalstelle.	3
4	interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson.	5
2	(2) ermittelt eine Gleichung einer Stammfunktion F von f.	4
3	(3) berechnet und interpretiert den Ausdruck im Sachzusammenhang.	6
4	(4) berechnet die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson 140 Minuten nach Leeren des Glases.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt u und v.	7
2	(2) untersucht, ob die Funktion h an der Stelle $t = 140$ zweimal differenzierbar ist.	4
3	(3) begründet, zu welchen Zeitpunkten die Blutalkoholkonzentration am schnellsten zu- bzw. abnimmt.	5
4	(3) berechnet die zugehörigen Änderungsraten.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die erste …	3			
2	bestimmt die globale …	6			
3	begründet den Einfluss …	3			
4	interpretiert die Ergebnisse …	2			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die höchste …	5			
2	(2) ermittelt eine Gleichung …	4			
3	(3) berechnet und interpretiert …	6			
4	(4) berechnet die Blutalkoholkonzentration …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt *u* und …	7			
2	(2) untersucht, ob die …	4			
3	(3) begründet, zu welchen …	5			
4	(3) berechnet die zugehörigen …	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**19**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.