

## Unterlagen für die Lehrkraft

# Abiturprüfung 2012

## Mathematik, Leistungskurs

---

### 1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

### 2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>

siehe Prüfungsaufgabe

### 3. Materialgrundlage

- entfällt

### 4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

#### 1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

Alternative 1:

- Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

#### 2. Medien/Materialien

- entfällt

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

**6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen****6.1 Modellösungen****Modellösung a)**

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

$X$  sei binomialverteilt mit  $n = 100$  und  $p = \frac{1}{6}$ . Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0,1002 \quad [\approx 0,3877 - 0,2874 = 0,1003 \text{ bei}$$

Verwendung der Tabelle]

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

$X$  sei binomialverteilt mit  $n = 200$  und  $p = \frac{1}{6}$ . Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k} \\ \approx 0,9574.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $E_3$  beträgt:

$$P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31) \\ \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,8369 - 0,3711 = 0,4658.$$

**Modellösung b)**

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Smartphones.  $X$  ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p = 0,04$ . Es soll gelten:

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,96^n \leq 0,01$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,96)} \approx 112,81.$$

Es müssen also mindestens 113 Smartphones entnommen werden.

**Modelllösung c)**

Bezeichnet die Zufallsgröße  $X$  die Anzahl der defekten Smartphones in der Lieferung, so kann man  $X$  als binomialverteilt annehmen mit  $n = 200$  und unbekanntem  $p \in \{0,02; 0,04\}$ .

Möglich sind die beiden folgenden Fehler:

1. Es handelt sich um eine Charge aus der Produktion mit einem Ausschussanteil von 2 %. Zufällig findet man in der Stichprobe aber mehr als 5 defekte Smartphones und stuft die Charge daher fälschlich als 4 %-Ausschuss ein.

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt:

$$P_{p=0,02}(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,2133.$$

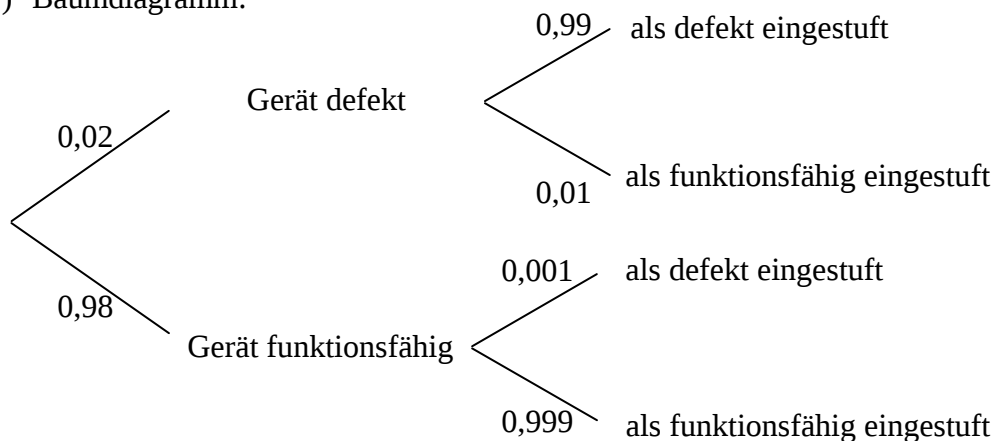
2. Es handelt sich um eine Charge aus der Produktion mit einem Ausschussanteil von 4 %. Zufällig findet man in der Stichprobe aber weniger als 6 defekte Smartphones und stuft die Charge daher fälschlich als 2 %-Ausschuss ein.

Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt:

$$P_{p=0,04}(X \leq 5) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,1856.$$

**Modelllösung d)**

(1) Baumdiagramm:



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also:

$$P_{\text{als defekt eingestuft}}(\text{nicht defekt}) = \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,001} \approx 0,047.$$

- (2) Ursprünglich entstanden Kosten bei  $n$  Smartphones und einem Defektanteil von 2 % in Höhe von:

$$K_1 = n \cdot 0,02 \cdot 110 \text{ €}.$$

Bei Einsatz des Prüfgeräts treten Fixkosten von 10.000 € auf. Die nicht erkannten defekten Smartphones haben einen Anteil an der gesamten ausgelieferten Menge von  $0,02 \cdot 0,01 = 0,0002 = 0,02 \%$ .

Sie verursachen Kosten in Höhe von

$$K_2 = n \cdot 0,0002 \cdot 110 \text{ €}.$$

Ein zu Unrecht aussortiertes Smartphone verursacht 100 € Kosten.

$$\text{Also: } K_3 = n \cdot 0,00098 \cdot 100 \text{ €}.$$

Das gesuchte  $n$  erhält man also aus dem Ansatz:

$$n \cdot 0,02 \cdot 110 \geq 10000 + n \cdot 0,0002 \cdot 110 + n \cdot 0,00098 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n \geq 4807,69$$

d. h., ab der Herstellung von ca. 4808 Smartphones lohnt sich die Anschaffung des Prüfgeräts.

### Modelllösung e)

- (1) Die Zufallsgröße  $X$  gibt die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe an. Dann kann  $X$  als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit  $p = 1 \%$  und Stichprobenanzahl  $n = 1000$ .

Der Erwartungswert von  $X$  beträgt  $\mu = 1000 \cdot 0,01 = 10$ , die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} \approx 3,146 > 3.$$

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt näherungsweise:

$$P_{H_0}(X \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \geq 0,95 \text{ und es ist } \mu + 1,64 \cdot \sigma \approx 15,16.$$

Als Entscheidungsregel erhält man:

Die Hypothese  $H_0$  wird genau dann abgelehnt, wenn  $X \geq 16$ , ansonsten wird die Hypothese beibehalten.

- (2) Der Großhändler möchte den Fehler 1. Art vermeiden, nämlich dass gilt: Die Hypothese des Herstellers  $p \leq 0,01$  ist wahr, wird aber aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Smartphones fälschlicherweise verworfen.

(3) Der Fehler 2. Art beträgt:

$$P_{p=0,02}(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{1000}{k} \cdot 0,02^k \cdot 0,98^{1000-k} \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,1539 .$$

(4) Es gibt zwei Prinzipien, wie der Fehler verringert werden kann:

Entweder durch eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs  $n$  oder durch Erhöhung des Signifikanzniveaus  $\alpha$  (oder durch eine Kombination beider Maßnahmen).

Weitere sinnvolle Möglichkeiten (z. B. Randomisierung) werden ebenfalls akzeptiert.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau 15 Handy-Besitzer ein Smartphone haben.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 32 und höchstens 38 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	bestimmt die Anzahl der Smartphones, die der Produktion mindestens entnommen werden müssen.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	beschreibt die beiden möglichen Fehler.	4
2	bestimmt deren Wahrscheinlichkeiten.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für ein fälschlicherweise als defekt aussortiertes Smartphone.	5
2	(2) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Anzahl.	4
3	(2) berechnet die gesuchte Anzahl.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe e)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5
2	(2) beschreibt den zu vermeidenden Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.	4
3	(3) berechnet den Fehler 2. Art.	4
4	(4) beschreibt die beiden sinnvollen Möglichkeiten einer Veränderung des Tests.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	3			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>8</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt die Anzahl ...	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>5</b>			

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	beschreibt die beiden ...	4			
2	bestimmt deren Wahrscheinlichkeiten.	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>8</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit ...	5			
2	(2) ermittelt einen Ansatz ...	4			
3	(2) berechnet die gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>12</b>			

**Teilaufgabe e)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
2	(2) beschreibt den zu ...	4			
3	(3) berechnet den Fehler ...	4			
4	(4) beschreibt die beiden ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (17) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe e)</b>		<b>17</b>			

<b>Summe insgesamt</b>		<b>50</b>			
------------------------	--	-----------	--	--	--



**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0