Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen auch unter Einbeziehung gebrochen-rationaler Funktionen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Für den Ansatz $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \; (a,b,c,d \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ liefern die gegebenen Bedingungen: (1) $s(0) = 0$; (2) $s(1) = 1$; (3) $s(2) = 3$; (4) $s(4) = 6$.

Aus (1) folgt: $d = 0$; weiterhin folgt aus (2) bis (4):

$$\left| \begin{array}{rl} a + \ b + \ c &= 1 \\ \wedge \ 8a + 4b + 2c &= 3 \\ \wedge \ 64a + 16b + 4c &= 6 \end{array} \right| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rl} a + b + c &= 1 \\ \wedge \ 6a + 2b &= 1 \\ \wedge \ 12a &= -2 \end{array} \right|$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert $a = -\frac{1}{6}$; $b = 1$; $c = \frac{1}{6}$; mit $d = 0$ gilt so:

$s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t$.

Modelllösung b)

(1) Mit $s'(t) = v(t)$ folgt $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6}$.

Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Stoppschild beträgt 1/6 Kilometer pro Minute, also 10 km/h. Der Fahrer hat folglich nicht angehalten.

Hier sollen auch alternative Lösungen akzeptiert werden, die nur die Tabelle als Argumentationsgrundlage nutzen.

(2) Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit im Intervall [0;4]

$v'(t) = -t + 2$ und $v''(t) = -1$ (Summen-, Faktorregel)

Die notwendige Bedingung $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ liefert eine mögliche Extremstelle.

Mit $v''(2) = -1 < 0$ liegt in $t = 2$ ein lokales Maximum mit $v(2) = 2\frac{1}{6}$.

Die Überprüfung der Ränder ergibt $v(0) = \frac{1}{6} < v(2)$ und $v(4) = \frac{1}{6} < v(2)$.

Somit ist $2\frac{1}{6}$ absolutes Maximum der Geschwindigkeitsfunktion im Intervall [0;4].

Die Maximalgeschwindigkeit liegt mit 2 1/6 Kilometer pro Minute, also 130 km/h, deutlich über der zulässigen Höchstgeschwindigkeit.

(3) Die Beschleunigungsfunktion a hat die Gleichung $a(t) = v'(t) = -t + 2$.

Der Graph von a hat eine Nullstelle in $t = 2$.

Für die Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse gilt also:

$$A = \int_0^2 a(t)\mathrm{d}t \quad = \int_0^2 (-t+2)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^2 = 2.$$

Damit schließt der Graph von a mit der t-Achse im Intervall [0;2] eine Fläche mit 2 FE ein.

Die Geschwindigkeitsfunktion liefert an der Stelle $t = 2$ den Wert $v(2) = 2\frac{1}{6}$ (vgl. b(2)).

Mit dem Integral $\int_0^2 a(t)\mathrm{d}t = 2$ wird hier die Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 2$ berechnet. Da aber das betrachtete Fahrzeug beim Start der Messung bereits eine Geschwindigkeit von 1/6 Kilometer pro Minute besaß, ergibt sich folglich $v(2) = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}$.

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich in allen Fällen als Summe der Anfangsgeschwindigkeit bzw. des Anfangswertes und des Wertes des Integrals über a im Intervall [0;2].

Modelllösung c)

(1) Ein Zeitintervall der Länge eine Minute im betrachteten Zeitraum lässt sich für $0 < k < 3$ angeben mit $[k; k + 1]$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht der Steigung $m(k)$ der Sekante durch die Punkte $P(k; s(k))$ und $Q(k + 1; s(k + 1))$:

$$m(k) = \frac{s(k+1) - s(k)}{(k+1) - k} = -\frac{1}{6}\cdot(k+1)^3 + (k+1)^2 + \frac{1}{6}\cdot(k+1) - \left(-\frac{1}{6}k^3 + k^2 + \frac{1}{6}k\right).$$

Als Zielfunktion des Extremwertproblems ergibt sich schließlich:

$m(k) = -0{,}5\cdot k^2 + 1{,}5\cdot k + 1$ mit den Ableitungen $m'(t) = -k + 1{,}5$ und $m''(t) = -1$.

Die notwendige Bedingung $m'(k) = 0 \Leftrightarrow -k + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow k = 1{,}5$ liefert eine mögliche Extremstelle.

Mit $m''(1{,}5) = -1 < 0$ liegt in $k = 1{,}5$ ein lokales Maximum mit $m(1{,}5) = 2{,}125$.

Die Überprüfung der Ränder ergibt $m(0) = 1 < m(1{,}5)$ und $m(3) = 1 < m(1{,}5)$.

Somit hat das Fahrzeug im Zeitintervall [1,5;2,5] die höchste Durchschnittsgeschwindigkeit.

Hier sollen alternativ auch graphische Argumente als Argumentationsbasis akzeptiert werden. Beispielsweise kann man Symmetriegründe hinzuziehen.

(2) Die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs wird durch v beschrieben, entsprechend lautet der Ansatz hier:

$$v(t_0) = 2{,}125 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot t_0^2 + 2t_0 + \frac{1}{6} = 2\frac{1}{8} \Leftrightarrow t_0 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 2{,}29 \vee t_0 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 1{,}71\,.$$

Beide Lösungen liegen im betrachteten Zeitintervall.

Modelllösung d)

(1) Der von der Schülergruppe gewählte Ansatz ist sicherlich nicht zulässig. Mögliche Argumente lauten:

- zu wenige Messwerte für eine stetige Modellierung,
- Wahl einer Funktion dritten Grades ist problematisch,
- Messpunkte zu weit auseinander, da die Momentangeschwindigkeit nicht exakt angegeben werden kann,
- Berücksichtigung der Messgenauigkeit,
- die Tabelle ist ausreichend für die Verwendung eines stückweise linearen Modells.

(2) Für den Ansatz $v_1(t) = at^2 + bt + c$ (mit $a \neq 0$) mit der Ableitung $v_1'(t) = 2at + b$ und der zur Anfangsbedingung $v(0) = 0$ passenden Stammfunktion $v_1(t) = \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct$ liefern die gegebenen Bedingungen:

(1) $v_1(0) = 0$; (2) $v_1'(2) = 0$; (3) $\int_0^2 v_1(t)\mathrm{d}t = 3$.

Aus (1) folgt: $c = 0$; weiterhin folgt aus (2) und (3):

$$\left|\begin{array}{r} 4a + b = 0 \\ \wedge\ \frac{8}{3}a + 2b = 3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 4a + b = 0 \\ \wedge\quad 4b = 9 \end{array}\right|$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert $a = -\frac{9}{16}$ und $b = \frac{9}{4}$. Mit $c = 0$ gilt so:

$$v_1(t) = -\frac{9}{16}t^2 + \frac{9}{4}t\,.$$

Mit der Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für Maxima, konkret $v_1''(t) = -\frac{9}{8} < 0$ bestätigt sich, dass die Funktionsvorschrift die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Die alternative Funktion s_1 ist die zur Anfangsbedingung $v_1(0) = 0$ passende Stammfunktion $s_1(t) = -\frac{9}{48}t^3 + \frac{9}{8}t^2$.

Durch Einsetzen ergeben sich mit $s_1(0) = 0$, $s_1(2) = 3$ und $s_1(4) = 6$ drei Werte, die mit den Messungen der Schülerinnen und Schüler übereinstimmen. Für $t = 1$ ergibt sich mit $s_1(1) = \frac{15}{16} \approx 0{,}9375$ eine geringfügige Abweichung, die als Fehler bei der Messung mit der Stoppuhr realistisch ist.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt die benötigten Gleichungen an.	2 (I)
2	bestimmt die Lösung des Gleichungssystems.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion v an.	2 (I)
2	(1) prüft die Beachtung des Stoppschildes.	2 (II)
3	(2) berechnet die maximale Geschwindigkeit im Intervall [0;4].	4 (I)
4	(2) prüft die Einhaltung der Höchstgeschwindigkeit.	2 (II)
5	(3) gibt die Beschleunigungsfunktion a an.	2 (I)
6	(3) berechnet den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von a und der t-Achse im Intervall [0;2] und gibt den Wert von $v(2)$ an.	3 (I)
7	(3) vergleicht den Wert des Integrals mit dem Funktionswert $v(2)$ und interpretiert die Differenz im Sachzusammenhang.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal **erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt einen Ansatz zur Bestimmung der maximalen Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall der Länge 1 Minute.	2 (III)
2	(1) leitet eine Zielfunktion her und ermittelt ihr Maximum.	5 (II)
3	(1) berechnet das Maximum der Zielfunktion.	2 (I)
4	(2) zeigt, dass das Fahrzeug im Zeitpunkt t_0 die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit als Momentangeschwindigkeit im Intervall [1,5;2,5] annimmt.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal **erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	(1) beurteilt die Eignung der Modellfunktion der Schülergruppe.	3 (III)
2	(2) leitet aus den Angaben ein lineares Gleichungssystem her.	3 (II)
3	(2) ermittelt die Lösung des Gleichungssystems.	3 (II)
4	(2) ermittelt Funktionsgleichungen für v_1 und s_1 und prüft ihre Übereinstimmungen mit den Messungen der Schülergruppe.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	gibt die benötigten …	2 (I)			
2	bestimmt die Lösung …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion …	2 (I)			
2	(1) prüft die Beachtung …	2 (II)			
3	(2) berechnet die maximale …	4 (I)			
4	(2) prüft die Einhaltung …	2 (II)			
5	(3) gibt die Beschleunigungsfunktion …	2 (I)			
6	(3) berechnet den Flächeninhalt …	3 (I)			
7	(3) vergleicht den Wert …	2 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt einen Ansatz …	2 (III)			
2	(1) leitet eine Zielfunktion …	5 (II)			
3	(1) berechnet das Maximum …	2 (I)			
4	(2) zeigt, dass das …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beurteilt die Eignung …	3 (III)			
2	(2) leitet aus den …	3 (II)			
3	(2) ermittelt die Lösung …	3 (II)			
4	(2) ermittelt Funktionsgleichungen für …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.