Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$f_{\text{a}}(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{4}at^2 + \frac{3}{2}a^2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}at + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 3at + 2a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = a \vee t = 2a$$

Die Funktion f_{a} hat die Nullstellen 0, a und $2a$. [Wegen $a \geq 0$ gilt $0 \leq a \leq 2a$.]

Die positiven Funktionswerte von f_2 für $0 < t < 2$ bedeuten: Zwischen 6.00 Uhr und 8.00 Uhr nimmt die Staulänge zu. Die negativen Funktionswerte von f_2 für $2 < t < 4$ bedeuten: Zwischen 8.00 Uhr und 10.00 Uhr nimmt die Staulänge ab.

Modelllösung b)

Die gesuchten Zeitpunkte sind die Zeiten $t_{\max}$ bzw. $t_{\min}$, zu denen die Funktion f_{a} ihr [absolutes] Maximum $f_{\text{a}}(t_{\max}) > 0$ bzw. ihr [absolutes] Minimum $f_{\text{a}}(t_{\min}) < 0$ annimmt.

Ist $f_{\text{a}}'(t_0) = 0$ und $f_{\text{a}}''(t_0) > 0$ [$f_{\text{a}}''(t_0) < 0$], dann ist $(t_0 \,|\, f_{\text{a}}(t_0))$ ein lokaler Tiefpunkt [Hochpunkt] des Graphen von f_{a}.

$$f_{\text{a}}'(t) = \frac{9}{4}t^2 - \frac{9}{2}at + \frac{3}{2}a^2;\; f_{\text{a}}'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a \approx 0{,}42a \vee t = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a \approx 1{,}58a$$

Die Untersuchung von f_{a}'' oder des Vorzeichenwechsels von f_{a}' ergibt: Zum Zeitpunkt

$t = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$ wird ein lokales Maximum mit positivem Funktionswert und zum Zeitpunkt

$t = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$ ein lokales Minimum mit negativem Funktionswert angenommen, da $a > 0$

vorausgesetzt ist. Wegen $f_{\text{a}}(0) = f_{\text{a}}(2a) = 0$ (Randwerte) sind die lokalen Extrema auch die absoluten Extrema im Zeitintervall $[0;2a]$.

Die Staulänge nimmt um 0,42*a* Stunden nach 6.00 Uhr am schnellsten zu, für $a = 2$ also um 6.51 Uhr, und nimmt um 1,58*a* Stunden nach 6.00 Uhr am schnellsten ab, für $a = 2$ also um 9.09 Uhr.

Modelllösung c)

(1) Da $f_a(t)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde angibt und die Staulänge zum Zeitpunkt $t = 0$ laut Aufgabenstellung 0 km beträgt, berechnet sich die Staulänge zum Zeitpunkt t, $0 \le t \le 2a$, durch das bestimmte Integral $\int_0^t f_a(u)\mathrm{d}u$.

$$\int_0^t \left(\frac{3}{4}u^3 - \frac{9}{4}au^2 + \frac{3}{2}a^2u\right)\mathrm{d}u = \frac{3}{16}t^4 - \frac{3}{4}at^3 + \frac{3}{4}a^2t^2 = F_a(t)\,.$$

Um 9.00 Uhr $(t = 3)$ beträgt die Staulänge für $a = 2$ ca. 1,7 km.

(2) $F_a\left(\frac{a}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow \frac{3}{256}a^4 - \frac{3}{32}a^4 + \frac{3}{16}a^4 = 6 \Leftrightarrow \frac{27}{256}a^4 = 6 \Leftrightarrow a = \sqrt[4]{\frac{512}{9}} \left[\vee a = -\sqrt[4]{\frac{512}{9}}\right].$

Der gesuchte Wert von a $(a > 0)$ ist $a = \sqrt[4]{\frac{512}{9}} \approx 2{,}75$.

(3) An der Nullstelle $t = a$ der Ableitungsfunktion f_a von F_a wechselt f_a das Vorzeichen von + nach – (vgl. *Abbildung 1*). Daher ist $t = a$ lokale Maximalstelle von F_a. Da F_a die Randwerte $F_a(0) = F_a(2a) = 0$ hat, ist $F_a(a) = \frac{3}{16}a^4$ absolutes Maximum von F_a.

Für $a = 2$ ist die Staulänge um 8.00 Uhr maximal; sie beträgt dann 3 km.

Modelllösung d)

(1) Der Stau besteht von 6.00 bis 10.00 Uhr, hat also zu diesen Uhrzeiten jeweils die Länge 0. Der Längenzuwachs entspricht den Flächeninhalten der Flächenstücke oberhalb, die Längenabnahme dem Flächeninhalt des Flächenstücks unterhalb der t-Achse. Aus der Tatsache, dass das dritte und letzte zwischen dem Graphen von g und der t-Achse eingeschlossene Flächenstück oberhalb der t-Achse liegt [ersatzweise durch Abschätzen und Vergleichen der Flächeninhalte des ersten und zweiten Flächenstücks], müssten zwischen 8.00 Uhr und 10.00 Uhr negative Staulängen aufgetreten sein.
[Zur Information: Die Funktion g, deren Graph in *Abbildung 2* dargestellt ist, hat die Gleichung $g(t) = -t \cdot (t-1) \cdot \left(t - \frac{14}{5}\right) \cdot (t-4)$.]

(2) Eine der folgenden Bedingungen oder eine gleichwertige wird erwartet:
1. Für jeden Zeitpunkt $t*$ des Zeitintervalls, in dem der Stau besteht, muss gelten $\int_0^{t^*} h(t)\mathrm{d}t \geq 0$.
2. Es gibt einen Zeitpunkt t_2 , $0 < t_2 < 4$, so dass für alle $t \in [t_2;4]$ gilt: $h(t) \leq 0$.
3. Es gibt einen Zeitpunkt t_1 , $0 < t_1 < 4$, so dass für alle $t \in [0;t_1]$ gilt: $h(t) \geq 0$.

[Auch andere, weniger formale Formulierungen sind möglich.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Nullstellen von f_a .	3 (I)
2	erklärt die Bedeutung positiver und negativer Funktionswerte von f_a im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	erklärt, dass die absoluten Extremstellen von f_a zu bestimmen sind.	3 (II)
2	bestimmt die absoluten Extremstellen von f_a.	8 (II)
3	gibt die Uhrzeiten an.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) bestimmt einen Term für die Staulänge in Abhängigkeit von a.	4 (II)
2	(1) berechnet die Staulänge um 9.00 Uhr für $a = 2$.	4 (I)
3	(2) bestimmt den gesuchten Wert von a.	4 (II)
4	(3) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, in Abhängigkeit von a.	6 (II)
5	(3) berechnet die maximale Staulänge für $a = 2$.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) begründet, warum die momentane Änderungsrate der Staulänge nicht durch g modelliert werden kann.	5 (II)
2	(2) ermittelt eine notwendige Bedingung, die jede sinnvolle Modellierungsfunktion h erfüllen muss.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Nullstellen …	3 (I)			
2	erklärt die Bedeutung …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	erklärt, dass die …	3 (II)			
2	bestimmt die absoluten …	8 (II)			
3	gibt die Uhrzeiten …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt einen Term …	4 (II)			
2	(1) berechnet die Staulänge …	4 (I)			
3	(2) bestimmt den gesuchten …	4 (II)			
4	(3) bestimmt den Zeitpunkt …	6 (II)			
5	(3) berechnet die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (20) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**20**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, warum die …	5 (II)			
2	(2) ermittelt eine notwendige …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.