Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da x nur in geraden Potenzen in den Funktionstermen von g und h vorkommt (z. B. $1 = 1 \cdot x^0$), sind die Graphen von g und h achsensymmetrisch zur „y-Achse“.

$\Rightarrow$ Das Logo ist eine achsensymmetrische Figur.

[Mögl. Alternative: Vergleich $g(x)$ und $g(-x)$ bzw. $h(x)$ und $h(-x)$ für alle $x \in IR$]

(2) Der Abstand der Punkte P und Q entspricht dem Abstand der Tiefpunkte des Graphen von g.

Ableitungen von g:

$g'(x) = 4x^3 - 7{,}5x$

$g''(x) = 12x^2 - 7{,}5$

Extremstellen von g:

Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion g lautet $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 7{,}5x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 7{,}5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 7{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{1{,}875} \vee x = -\sqrt{1{,}875}$

$g''(0) = -7{,}5 < 0$: relatives Maximum an der Stelle 0.

$g''\left(\sqrt{1{,}875}\right) = g''\left(-\sqrt{1{,}875}\right) = 22{,}5 - 7{,}5 > 0$: relatives Minimum an den Stellen $\sqrt{1{,}875}$ und $-\sqrt{1{,}875}$.

Die Querstrebe ist $2\sqrt{1{,}875} \approx 2{,}74$ cm lang.

(3) Da das Rechteck in dem Logo und zwar achsensymmetrisch zur Symmetrieachse des Logos („y-Achse“) liegen soll, gilt für die maximale Höhe b des Rechtecks

$b = g(0{,}75) - h(0)$.

$\Rightarrow b = 0{,}75^4 - 3{,}75 \cdot 0{,}75^2 - 1 + 4 \approx 1{,}21$.

Die maximale Höhe des Rechtecks bzw. der Beschriftung beträgt ungefähr 1,21 cm.

Modelllösung b)

(1) Die größte Breite des Logos beträgt 4 cm.

(2) Für den Rauminhalt eines Logos gilt: $V = G \cdot Höhe$.

Berechnung von G (Der Graph von g liegt oberhalb des Graphen von h.):

$$\begin{aligned} G &= \int_{-2}^{2} [g(x) - h(x)]\mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot \int_{0}^{2} (-0{,}75x^2 + 3)\mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot \left[-0{,}25x^3 + 3x\right]_0^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Es gilt $G = 8\ \text{cm}^2$ und $V = 8\ \text{cm}^2 \cdot 0{,}1\ \text{cm} = 0{,}8\ \text{cm}^3$.

Die Silbermasse der 150 Logos beträgt $150 \cdot 0{,}8 \cdot 10{,}5\ \text{g} = 1260\ \text{g}$.

Modelllösung c)

(1) Ableitungen von f_a:

$f_a'(x) = 4x^3 + 2(a^2 - 4)x$

$f_a''(x) = 12x^2 + 2(a^2 - 4)$

$f_a'''(x) = 24x$

Wendestellen von f_a:

Ein notwendiges Kriterium für eine Wendestelle einer zweimal differenzierbaren Funktion f_a lautet $f_a''(x) = 0$.

$$f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 2(a^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{4 - a^2}{6}} \vee x = -\sqrt{\frac{4 - a^2}{6}}$$

(a) Für $0 \le a < 2$ ist $4 - a^2 > 0$. Die auftretenden Wurzelausdrücke sind daher definiert. Es liegen mögliche Wendestellen vor.
Ein hinreichendes Kriterium für eine Wendestelle einer dreifach differenzierbaren Funktion f_a lautet $f_a''(x) = 0 \wedge f_a'''(x) \ne 0$.

Da $f_a'''\left(\sqrt{\frac{4 - a^2}{6}}\right) = 24 \cdot \sqrt{\frac{4 - a^2}{6}} \ne 0$ und $f_a'''\left(-\sqrt{\frac{4 - a^2}{6}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{4 - a^2}{6}} \ne 0$ gilt,

besitzt der Graph von f_a bei $x = \sqrt{\frac{4 - a^2}{6}}$ bzw. $x = -\sqrt{\frac{4 - a^2}{6}}$ Wendestellen.

(b) Für $a > 2$ gilt $f_a''(x) = 12x^2 + 2(a^2 - 4) > 0$ für alle $x \in IR$. Das notwendige Kriterium ist an keiner Stelle erfüllt.

$\Rightarrow$ Die Graphen von f_a besitzen für $a > 2$ keine Wendestellen.

(c) Für $a = 2$ gilt $f_2(x) = x^4 - 16$. Die mögliche Wendestelle befindet sich an der Stelle $x = 0$. Da $x^4 - 16 \geq -16$ für alle $x \in IR$ gilt und $f_2(0) = -16$ ist, folgt, dass der Graph von f_2 an der Stelle 0 einen relativen [und absoluten] Tiefpunkt besitzt.

$\Rightarrow$ Der Graph von f_2 besitzt keine Wendestelle.

[Alternativ könnte an dieser Stelle beispielsweise eine Begründung mit Hilfe höherer Ableitungen bzw. dem „Vorzeichenwechselkriterium" erfolgen.]

(2) Für eine „W-Form" muss der Graph von f_a drei Extrempunkte (zwei Minima und ein Maximum) und damit (mindestens) zwei Wendepunke besitzen.

Mit (1) folgt, dass nur für $0 \leq a < 2$ die „W-Form" des Graphen erhalten bleibt.

(3) Es muss gelten:

$$\left|f_a(0) - f_{a+0,5}(0)\right| = 4 \Leftrightarrow \left|-4a^2 + 4(a+0,5)^2\right| = 4 \Leftrightarrow \left|4a+1\right| = 4$$
$$\Leftrightarrow 4a + 1 = 4 \vee 4a + 1 = -4 \Leftrightarrow a = 0,75 \vee a = -1,25\ (\notin D(a)).$$

Gleichungen der Begrenzungskurven des Logos:

$f_{0,75}(x) = x^4 - 3,4375x^2 - 2,25$ und

$f_{1,25}(x) = x^4 - 2,4375x^2 - 6,25$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass das Logo achsensymmetrisch ist.	4
2	(2) gibt an, dass der Abstand der Punkte P und Q dem Abstand der Tiefpunkte entspricht.	2
3	(2) berechnet die 1. Ableitung und die möglichen Extremstellen der Funktion g.	5
4	(2) bestimmt die Länge der Querstrebe.	4
5	(3) berechnet die maximale Höhe der Beschriftung.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) gibt die maximale Breite des Logos an.	2
2	(2) bestimmt die Grundfläche eines Logos.	7
3	(2) berechnet die benötigte Silbermasse.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet die ersten beiden Ableitungen von f_a und die möglichen Wendestellen des Graphen von f_a.	9
2	(1) bestimmt die Wendestellen des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.	5
3	(2) erklärt, für welche Werte von a die „W-Form" des Graphen von f_a erhalten bleibt.	2
4	(3) ermittelt die Gleichungen der Begrenzungskurven des Logos.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das …	4			
2	(2) gibt an, dass …	2			
3	(2) berechnet die 1. Ableitung …	5			
4	(2) bestimmt die Länge …	4			
5	(3) berechnet die maximale …	3			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die maximale …	2			
2	(2) bestimmt die Grundfläche …	7			
3	(2) berechnet die benötigte …	2			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die ersten …	9			
2	(1) bestimmt die Wendestellen …	5			
3	(2) erklärt, für welche …	2			
4	(3) ermittelt die Gleichungen …	5			
sachlich richtige Alternativen: (21) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**21**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.