



Name: _____

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Das Logo der Firma Westwerk ist eine Fläche, deren Rand sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch Teile der Graphen der Funktionen g und h mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x^4 - 3,75x^2 - 1,$$

$$h(x) = x^4 - 3x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R},$$

beschreiben lässt (siehe *Abbildung* auf Seite 2). Das Logo wird bei dieser Beschreibung durch die Graphen von g und h eingeschlossen. 1 Längeneinheit entspricht 1 cm.

- a) (1) *Zeigen Sie, dass das Logo eine achsensymmetrische Figur ist.*
- (2) Die Punkte P und Q liegen zwei Millimeter direkt „unter“ den tiefsten Punkten der oberen Begrenzungslinie des Logos. Zur Befestigung verbindet eine Querstrebe die Punkte P und Q .
Bestimmen Sie rechnerisch die Länge der Querstrebe.
- (3) In das Logo soll ein zur Symmetrieachse des Logos symmetrisches Rechteck mit der Breite 1,5 cm für Beschriftungen eingefügt werden.
Berechnen Sie die maximale Höhe der Beschriftung. (18 Punkte)
- b) Zum Firmenjubiläum soll das Logo für verdiente Mitarbeiter in Silber produziert werden. Die Dicke soll 1 mm betragen. 1 cm^3 Silber hat eine Masse von 10,5 g.
- (1) *Geben Sie die maximale Breite des Logos an.*
- (2) *Bestimmen Sie die Silbermasse, die für 150 Logos benötigt wird.* (11 Punkte)



Name: _____

c) Die Firmenleitung schlägt vor, das Logo leicht abzuändern. Das „Doppel-W“ soll aber erhalten bleiben. Die Marketingabteilung experimentiert daraufhin mit Elementen der Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = x^4 + (a^2 - 4)x^2 - 4a^2$ ($a \geq 0$) als Begrenzungsfunktionen. Es gilt $g(x) = f_{0,5}(x)$ und $h(x) = f_1(x)$.

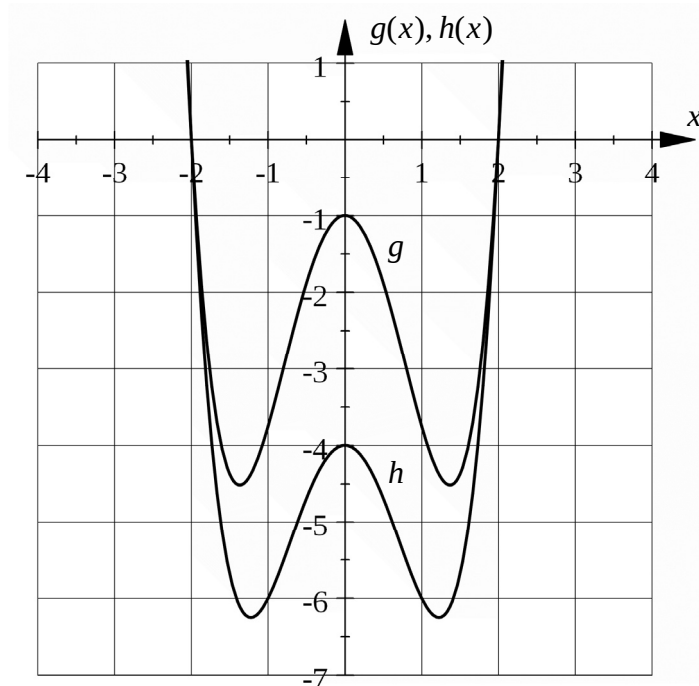
(1) Untersuchen Sie den Graphen von f_a in Abhängigkeit von a auf Wendestellen.

[Zur Kontrolle: Für die möglichen Wendestellen gilt $x = \sqrt{\frac{4-a^2}{6}} \vee x = -\sqrt{\frac{4-a^2}{6}}$.]

(2) Erklären Sie, für welche Werte von a die „W-Form“ des Graphen von f_a erhalten bleibt.

(3) Nach einem Vorschlag sollen als Begrenzungskurven die Graphen zweier Funktionen f_a und $f_{a+0,5}$ gewählt werden. Außerdem soll die „größte Höhe“ des Logos (Abstand der „y-Koordinaten“ an der Stelle 0) 4 cm betragen.

Ermitteln Sie die Gleichungen der Begrenzungskurven des Logos. (21 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung