Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Gemeinsamkeiten:

Die Ozonkonzentration steigt in beiden Fällen vom Morgen an und erreicht am Nachmittag ihren höchsten Stand. Danach flacht sie zum Abend hin ab.

Unterschiede:

Die Ozonkonzentration auf dem Land liegt ständig über dem städtischen Niveau, der höchste Wert wird mehr als eine Stunde später erreicht und die Zunahme bzw. die Abnahme ist geringer als in der „Stadtkurve“.

(2) Ozonkonzentration um 7 Uhr: $f(0) = 55$ µg/m^3

Ozonkonzentration um 21 Uhr: $f(14) = 76{,}16...$ µg/m^3

(3) Ableitungen von *f*:

$f'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t)$

$f''(t) = 0{,}06 \cdot (3\,t^2 - 63{,}6\,t + 202{,}4)$

Extremstellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion f lautet $f'(t) = 0 \wedge f''(t) \neq 0$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t) = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8{,}8 \vee t = 23$

0 und 23 liegen nicht im Inneren des Definitionsbereiches. Deswegen kommt höchstens 8,8 als relative Extremstelle infrage.

$f''(8{,}8) = 0{,}06 \cdot (-124{,}96) < 0 \;\Rightarrow$ Relatives Maximum an der Stelle 8,8.

Als einzige relative Extremstelle ist das relative Maximum zugleich absolutes Maximum.

8,8 entspricht dem Zeitpunkt 15.48 Uhr.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

$f(8{,}8) = 181{,}75...$. Die höchste Ozonkonzentration beträgt ungefähr 181,75 µg/m^3.

Modelllösung b)

(1) Es gilt z. B. $f(8{,}8-0{,}5)=180{,}83...>180$ und $f(8{,}8+0{,}5)=180{,}80...>180$. Zusammen mit den Ergebnissen von a) (3) folgt die zu begründende Aussage der Aufgabenstellung.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

(2) Die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentrationen am stärksten zu- bzw. abnehmen, werden über die Wende- bzw. Randstellen des Graphen von *f* ermittelt.

$f'''(t)=0{,}06\cdot(6t-63{,}6)$

Wendestellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine Wendestelle einer dreimal differenzierbaren Funktion f lautet $f''(t)=0 \wedge f'''(t)\neq 0$.

$$f''(t)=0 \Leftrightarrow 0{,}06\cdot(3t^2-63{,}6t+202{,}4)=0 \Leftrightarrow t^2-21{,}2t+\frac{202{,}4}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow t=10{,}6\pm\sqrt{44{,}89...} \Leftrightarrow t=3{,}89...\vee t=17{,}30...\ .$$

$t=17{,}30...>14 \Rightarrow$ Die Stelle 17,30… liegt nicht im Definitionsbereich von f und spielt deswegen bei den Überlegungen keine Rolle.

$\Rightarrow$ Die einzig mögliche Wendestelle liegt bei $t_1=3{,}89...$.

$f'''(t_1)<0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $t_1=3{,}89...$.

Vergleich der Steigungen an der Wendestelle und den Randstellen:

$f'(0)=0$

$f'(t_1)=21{,}9... \Rightarrow$ 3,89... Stelle der größten Zunahme

$f'(14)=-39{,}3... \Rightarrow$ 14 Stelle der größten Abnahme

Um 10.53 Uhr (3,89… entspricht 3:53 h) nimmt die Ozonkonzentration am stärksten zu und um 21 Uhr am stärksten ab.

(3) Für die durchschnittliche Ozonkonzentration zwischen 7 und 21 Uhr gilt:

$$m=\frac{1}{14}\int_0^{14} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$m=\frac{1}{14}\cdot\left[0{,}06\cdot\left(0{,}05t^5-2{,}65t^4+\frac{101{,}2}{3}t^3\right)+55t\right]_0^{14}$$

$$=130{,}656$$

$$\approx 131\ [\mu g/m^3]$$

(4) Es gilt z. B. $f(24)=-262{,}95...$. Da keine negativen Ozonwerte existieren, ist eine Erweiterung des Definitionsbereiches auf das Intervall [0; 24] nicht sinnvoll.

Modelllösung c)

Mit den angegebenen Werten aus a) (3) folgt:

$$180 = 0{,}25 \cdot 120 + 5{,}5 \cdot T_m - 40 \Leftrightarrow T_m = \frac{190}{5{,}5} = 34{,}54\ldots \;.$$

Nach dem Schweizer Prognosemodell könnte dieselbe Konzentration bei einer prognostizierten Temperatur von etwa 35 °C erreicht werden.

Modelllösung d)

Es gilt: $f\,'_{a;b}(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 2a \cdot t)$. Für die Nullstellen der Ableitung ergibt sich:

$t = 0 \vee t = 15{,}9 \pm \sqrt{15{,}9^2 - 2a}$. Da $t = 0$ bzw. $t = 15{,}9 + \sqrt{15{,}9^2 - 2a} > 14$ nicht im Intervall]0;14[liegen und in der Aufgabenstellung vorgegeben ist, dass $f_{a;b}$ in diesem Intervall eine relative Maximalstelle besitzt, liegt an der Stelle $t = 15{,}9 - \sqrt{15{,}9^2 - 2a}$ eine relative – und als einzige Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion – auch absolute Maximalstelle.

Damit das Maximum zwischen 14 und 17 Uhr liegt, muss

$7 < 15{,}9 - \sqrt{15{,}9^2 - 2a} < 10$ gelten.

Es folgt:

$8{,}9 > \sqrt{15{,}9^2 - 2a} > 5{,}9$ bzw. $\dfrac{15{,}9^2 - 8{,}9^2}{2} < a < \dfrac{15{,}9^2 - 5{,}9^2}{2}$,

d. h. $86{,}8 < a < 109$.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) vergleicht die Graphen von *f* und *g* im Sachzusammenhang.	4
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen um 7 und 21 Uhr nach dem Prognosemodell an.	2
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt, an dem die höchste Ozonkonzentration prognostiziert wird, und berechnet die höchste Ozonkonzentration.	9
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass am kommenden Tag in der Stadt eine Ozonkonzentration von mindestens 180 $\mu g/m^3$ für einen Zeitraum von mehr als einer Stunde prognostiziert wird.	3
2	(2) bestimmt die Wendestelle von f.	6
3	(2) ermittelt die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentration am stärksten zu- bzw. abnimmt.	5
4	(3) gibt einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Ozonkonzentration im angegebenen Zeitraum an.	2
5	(3) ermittelt die mittlere Ozonkonzentration im angegebenen Zeitraum.	4
6	(4) begründet, dass die Fortsetzung der Funktion f auf das Intervall [0; 24] zur Prognose der Ozonkonzentration nicht geeignet ist.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt, welche Tageshöchsttemperatur für den nächsten Tag prognostiziert werden müsste, damit nach dem Schweizer Prognosemodell ein Ozonhöchstwert von 180 $\mu g/m^3$ prognostiziert wird.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt die Stelle des absoluten Maximums des Graphen von $f_{a;b}$ im Intervall $\left[0;14\right]$.	5
2	bestimmt, für welche Belegungen von a das Ozonmaximum zwischen 14 und 17 Uhr liegt.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die Graphen …	4			
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen …	2			
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt …	9			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass am …	3			
2	(2) bestimmt die Wendestelle …	6			
3	(2) ermittelt die Zeitpunkte …	5			
4	(3) gibt einen Ansatz …	2			
5	(3) ermittelt die mittlere …	4			
6	(4) begründet, dass die …	2			
sachlich richtige Alternativen: (22) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**22**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt, welche Tageshöchsttemperatur …	4			
sachlich richtige Alternativen: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Stelle …	5			
2	bestimmt, für welche …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.