Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

2. Medien/Materialien
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Mögliche Parametergleichung von E_{EGH}:

$$\vec{x} = \overrightarrow{DE} + r \cdot \overrightarrow{EG} + s \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r,s \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich $\left| \begin{array}{lll} x_1 = & 4 - 4r - 4s \\ x_2 = & 4r \\ x_3 = & 4 + s \end{array} \right|,\ \left| \begin{array}{lll} x_1 = & 4 - x_2 - 4 \cdot (x_3 - 4) \\ r = & x_2 / 4 \\ s = & x_3 - 4 \end{array} \right|$

und schließlich $E_{\text{EGH}}:\ x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 = 20$.

(2) F ist der Schnittpunkt der Ebene E_{EGH} mit der Geraden g durch S und B. Es gilt

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{DS} + k \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der „rechten Seite“ in die Koordinatengleichung von E_{EGH} führt auf die

Gleichung $8k + 8k + 4 \cdot (8 - 8k) = 20$ mit der Lösung $k = \frac{3}{4}$.

Einsetzen von k in die Parametergleichung von g ergibt $F(6\,|\,6\,|\,2)$.

(3) Der Spannvektor $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{EGH} liegt nicht in der x_1-x_2-Ebene. Daher ist E_{EGH} nicht parallel zur x_1-x_2-Ebene, somit auch die Deckfläche der Schachtel nicht parallel zu ihrer Grundfläche.

Modelllösung b)

(1) Das Skalarprodukt der Diagonalenvektoren $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{HF}$ ist Null:

$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}=0$. Die Diagonalen sind somit orthogonal.

(2) $|\overrightarrow{EG}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right|=4\cdot\sqrt{2}\approx 5{,}7$ [cm], $|\overrightarrow{HF}|=\left|\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{36+36+9}=9$ [cm].

Der Schnittpunkt *V* der Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ muss wie die Punkte *E* und *G* die x_3-Koordinate 4 haben: $V=(v_1\,|\,v_2\,|\,4)$. Aus dem Ansatz

$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{DH}+r\cdot\overrightarrow{HF}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$ ergibt sich sofort $r=\frac{1}{3}$ sowie $v_1=v_2=2$.

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist $V(2\,|\,2\,|\,4)$.

(3) Die Diagonalen sind gemäß (1) orthogonal. Für den Flächeninhalt der Deckfläche gilt:

$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{HV}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{VF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{HF}|=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 9=18\sqrt{2}\approx 25{,}5$ [cm^2].

[Da außerdem *V* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ ist, handelt es sich bei dem Viereck *EFGH* um ein Drachenviereck.]

Modelllösung c)

(1) Das Volumen der Pyramide *ABCDS* beträgt $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 8=170\frac{2}{3}$ [cm^3].

(2) Die Höhe h_T des oberen Teilstücks *EFGHS* der Pyramide *ABCDS* erhält man z. B. als Abstand der zur Ebene E_{EGH} parallelen Ebene durch den Punkt *S*:

$h_T=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}-20}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{32-20}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ [cm]. Der Flächeninhalt $G_T=18\sqrt{2}\approx 25{,}5$ [cm^2]

seiner Grundfläche ist aus Teilaufgabe b) (3) bekannt. Das Volumen des Teilstücks *EFGHS* ist damit: $V_T=\frac{1}{3}\cdot G_T\cdot h_T=\frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=24$ [cm^3].

Das Volumen der Schachtel beträgt $170\frac{2}{3}\text{ cm}^3-24\text{ cm}^3=146\frac{2}{3}\text{ cm}^3$.

Modelllösung d)

(1) $H_4 = (0\,|\,0\,|\,4)$, $F_4 = (4\,|\,4\,|\,4)$. Es gilt $|\overrightarrow{EF_4}| = |\overrightarrow{F_4G}| = |\overrightarrow{GH_4}| = |\overrightarrow{H_4E}| = 4$ und benachbarte Seiten sind orthogonal. Die neue Deckfläche ist also ein Quadrat.

(2) Der Punkt F_a liegt genau dann auf der Strecke $\overline{SB}$, wenn für seine x_3-Koordinate

$\frac{6a-32}{a-6}$ gilt: $0 \le \frac{6a-32}{a-6} \le 8$. Dabei ist $0 \le a < 6$ vorausgesetzt.

Als zusätzliche Bedingung für a ergibt sich daher einerseits:

$$0 \le \frac{6a-32}{a-6} \Leftrightarrow 6a-32 \le 0 \Leftrightarrow a \le \frac{16}{3},$$

andererseits:

$$\frac{6a-32}{a-6} \le 8 \Leftrightarrow 6a-32 \ge 8a-48 \Leftrightarrow a \le 8.$$

Insgesamt resultiert: F_a liegt genau dann auf der Strecke $\overline{SB}$, wenn $0 \le a \le \frac{16}{3}$ gilt.

[Auch elementargeometrische oder anschauliche Argumente sind vorstellbar.]

Interpretation im Sachzusammenhang:
Für die berechneten Werte von a hat die Schachtel eine viereckige Deckfläche wie in der *Abbildung* dargestellt.

Für $\frac{16}{3} < a < 6$ liegt der Punkt F_a [nicht auf der Strecke $\overline{SB}$, sondern wegen seiner für diese Werte von a negativen x_3-Koordinate] auf der Geraden *SB* „unterhalb“ der x_1-x_2-Ebene. Die Schachtel hätte eine grundlegend andere Form: Ihre Deckfläche hätte die Form eines Fünfecks und eine gemeinsame Kante mit der dann ebenfalls fünfeckigen Grundfläche der Schachtel.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	(1) gibt eine Parametergleichung von E_{EGH} an.	3 (I)
2	(1) bestimmt eine Koordinatengleichung von E_{EGH} .	3 (II)
3	(2) bestimmt die Koordinaten des Punktes *F*.	5 (II)
4	(3) prüft, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) zeigt, dass die Diagonalen orthogonal sind.	3 (II)
2	(2) berechnet die Länge der beiden Diagonalen.	3 (I)
3	(2) bestimmt die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes *V*.	4 (II)
4	(3) berechnet den Flächeninhalt der Deckfläche.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) berechnet das Volumen der Pyramide *ABCDS*.	2 (I)
2	(2) ermittelt das Volumen des oberen Teilstücks *EFGS* der Pyramide.	5 (II)
3	(2) berechnet das Volumen der Schachtel.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) untersucht, welche Form die Deckfläche der Schachtel für $a = 4$ hat.	5 (II)
2	(2) ermittelt die Werte von *a*, für die der Punkt F_a auf der Strecke $\overline{SB}$ liegt.	6 (III)
3	(2) interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Parametergleichung …	3 (I)			
2	(1) bestimmt eine Koordinatengleichung …	3 (II)			
3	(2) bestimmt die Koordinaten …	5 (II)			
4	(3) prüft, ob die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	3 (II)			
2	(2) berechnet die Länge …	3 (I)			
3	(2) bestimmt die Koordinaten …	4 (II)			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet das Volumen …	2 (I)			
2	(2) ermittelt das Volumen …	5 (II)			
3	(2) berechnet das Volumen …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) untersucht, welche Form …	5 (II)			
2	(2) ermittelt die Werte …	6 (III)			
3	(2) interpretiert das Ergebnis …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0