Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \; \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ [LE].

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene E_{ABC}. Für einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ von E_{ABC} gilt deswegen:

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ bzw. } \left| \begin{array}{rl} -12n_1 + 12n_2 & = 0 \\ -12n_2 + 12n_3 & = 0 \end{array} \right| .$$

Eine mögliche Lösung ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für eine Normalenform von E_{ABC} folgt

$$E_{\text{ABC}} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } E_{\text{ABC}} : x_1 + x_2 + x_3 = 3 .$$

Modelllösung b)

Es gilt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

$S \in E_{\text{ABC}}$, da 1 + 0 + 2 = 3 gilt.

$S \in g$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wahr ist für $r = -2$.

[Eine mögliche Alternative ist die Berechnung des Schnittpunktes von E_{ABC} und *g*.]

Da ein Normalenvektor von E_{ABC} identisch zu einem Richtungsvektor von *g* ist, schneidet *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht.

Modelllösung c)

(1) In einem gleichseitigen Dreieck ist der Schwerpunkt von den Eckpunkten gleich weit entfernt. Da *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, ist jeder Punkt auf *g* von den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt (Satz des Pythagoras). Deswegen ist ein möglicher Ansatz zur Berechnung der Koordinaten des (der) gesuchten Punkte(s) *D*: $\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$. Mit $D = (3+r \mid 2+r \mid 4+r)$ erhält man

$$\sqrt{(r-6)^2 + (r+6)^2 + (r+6)^2} = \sqrt{288} \Leftrightarrow 3r^2 + 12r + 108 = 288 \Leftrightarrow r = 6 \vee r = -10.$$

Die gesuchten Punkte sind: $D_1(9 \mid 8 \mid 10)$ $[= D]$ und $D_2(-7 \mid -8 \mid -6)$.

(2) Für den Abstand *d* des Punktes *D* von der Ebene E_{ABC} ergibt sich:

$$d(D, E_{\text{ABC}}) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - 3 \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (27 - 3) = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8 \cdot \sqrt{3} \approx 13{,}86 \,[\text{LE}].$$

Für das Volumen des Tetraeders gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta\text{ABC}} \cdot d(D, E_{\text{ABC}})$.

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks *ABC* erhält man:

$$A_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{288}{4} \cdot \sqrt{3} = 72 \cdot \sqrt{3} \;\Rightarrow\; V = \frac{1}{3} \cdot 72\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 576 \,[\text{VE}].$$

(3) Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ ergibt sich für einen Normalenvektor $\vec{n}_{\mathrm{ABD}} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

von E_{ABD} aus dem Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

die mögliche Lösung $\vec{n}_{\mathrm{ABD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor der Ebene E_{ABC} ist

$\vec{n}_{\mathrm{ABC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe oben).

Der Winkel zwischen den beiden Dreiecken *ABC* und *ABD* ist (in diesem Fall) gleich

dem Winkel der zugehörigen Trägerebenen: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\mathrm{ABC}} \cdot \vec{n}_{\mathrm{ABD}}|}{|\vec{n}_{\mathrm{ABC}}| \cdot |\vec{n}_{\mathrm{ABD}}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 70{,}53°$.

Modelllösung d)

(1) $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OM_{\mathrm{CD}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{CD}}W} = \overrightarrow{OM_{\mathrm{CD}}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Der gesuchte Punkt ist $W(-3\,|\,8\,|\,10)$.

(2) [Die Koordinaten der Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} sind jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte des Tetraeders.]

$M_{\mathrm{AB}}(3\,|\,2\,|\,-2)$, $M_{\mathrm{BC}}(-3\,|\,2\,|\,4)$, $M_{\mathrm{CD}}(3\,|\,2\,|\,10)$ und $M_{\mathrm{DA}}(9\,|\,2\,|\,4)$.

(3) Die Punkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} liegen alle in der Ebene mit der Gleichung $x_2 = 2$.

Es gilt: $\overrightarrow{M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\text{CD}}M_{\text{DA}}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\text{DA}}M_{\text{AB}}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Wegen $\left|\overline{M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}}\right| = \left|\overline{M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}}\right| = \left|\overline{M_{\text{CD}}M_{\text{DA}}}\right| = \left|\overline{M_{\text{DA}}M_{\text{AB}}}\right| = 6\sqrt{2}$ [LE] ist das Viereck $M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}M_{\text{DA}}$ eine Raute, wegen $\overrightarrow{M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}} \cdot \overrightarrow{M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}} \perp \overrightarrow{M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}}$ ein Quadrat.

(4) Der angegebene Punkt T ist der Mittelpunkt des Würfels (Mittelpunkt der Strecke $\overline{AW}$).
Die Strecke $\overline{AD}$ ist die Diagonale einer Würfelseite. Deswegen ist der Abstand des Punktes T von der Kante $\overline{AD}$ die Hälfte der Kantenlänge des Würfels:

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{WD}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 6 \text{ [LE].}$$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.	5
2	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Normalenform.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	zeigt, dass S auf der Geraden g und in der Ebene E_{ABC} liegt.	4
2	zeigt, dass g die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Punkte der Geraden g, die als vierter Eckpunkt D des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ in Frage kommen.	4
2	(2) berechnet den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC}.	3
3	(2) berechnet das Volumen des Tetraeders $ABCD$.	4
4	(3) ermittelt die Größe des Winkels, den die Dreiecke ABC und ABD einschließen.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt die Koordinaten des Eckpunktes W des in der *Abbildung* dargestellten Würfels.	3
2	(2) gibt die Koordinaten der Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA} an.	3
3	(3) untersucht die speziellen Eigenschaften des Vierecks $M_{\text{AB}}M_{\text{BC}}M_{\text{CD}}M_{\text{DA}}$.	5
4	(4) ermittelt den Abstand des Punktes T von der Kante $\overline{AD}$ des Tetraeders.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(2) berechnet eine Gleichung …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass S …	4			
2	zeigt, dass g …	3			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Punkte …	4			
2	(2) berechnet den Abstand …	3			
3	(2) berechnet das Volumen …	4			
4	(3) ermittelt die Größe …	5			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Koordinaten …	3			
2	(2) gibt die Koordinaten …	3			
3	(3) untersucht die speziellen …	5			
4	(4) ermittelt den Abstand …	6			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0