Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da es sich um eine gerade Pyramide mit zur x-y-Ebene parallelen Grundfläche handelt, stimmen die x- und y-Koordinaten der Pyramidenspitze S mit denen des Mittelpunkts $M(4,5\,|\,4,5\,|\,1)$ ihrer quadratischen Grundfläche $ABCD$ überein. Zur z-Koordinate von M ist die Höhe der Pyramide zu addieren, so dass sich $S(4,5\,|\,4,5\,|\,2)$ ergibt.

(2) $|\overline{AB}| = 1\,\text{m}$ wie vorausgesetzt.

$|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 1^2}\ \text{m} = \sqrt{1,5}\ \text{m}\ \ [\approx 1,22\,\text{m}]$.

[Das Dreieck ABS ist gleichschenklig.]

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\ \text{m}^3 = \frac{1}{3}\ \text{m}^3$.

Ihre Oberfläche besteht aus der $1\,\text{m}^2$ großen Grundfläche und der Mantelfläche.

Die Mantelfläche besteht aus vier [kongruenten] Dreiecken mit der Grundseitenlänge 1 m und der Höhe $h = \sqrt{1^2 + 0,5^2}\ \text{m} = \sqrt{1,25}\ \text{m}$. Der Inhalt jeder Dreiecksfläche beträgt somit $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1,25}\ \text{m}^2$. Der Oberflächeninhalt der Pyramide ist

$O = 1\ \text{m}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1,25}\ \text{m}^2 \approx 3,24\ \text{m}^2$.

Modelllösung b)

Das Dreieck ABS liegt in der Ebene $E_{ABS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{n}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}_1 \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Daher ist $\vec{n}_1$ Normalenvektor der Ebene E_{ABS}.

Die Grundfläche $ABCD$ ist parallel zur x-y-Ebene, deren Normalenvektor z. B. $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Da der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

$\arccos\left(\frac{\vec{n}_1 * \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}\cdot 1}\right) \approx 63{,}4°\ [\leq 90°]$ beträgt, ist die [in der Ebene E_{ABS} liegende] Seitenfläche *ABS* der Pyramide um ca. 63,4° gegen ihre Grundfläche *ABCD* geneigt.

Modelllösung c)

(1) Die Lichtquelle befindet sich im Punkt $L_1(4{,}5\,|\,9\,|\,1)$.

Offenbar wird nur die Pyramidenfläche *BCS* von den Lichtstrahlen getroffen.
Daher sind die Schnittpunkte B', C' und S' der Geraden L_1B, L_1C und L_1S mit der *x*-*z*-Ebene ($y = 0$) die Eckpunkte des Schattendreiecks $B'C'S'$:

$L_1B\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $t = \frac{9}{4}$ die *x*-*z*-Ebene in $B'(5{,}625\,|\,0\,|\,1)$.

$L_1C\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $u = \frac{9}{4}$ die *x*-*z*-Ebene in $C'(3{,}375\,|\,0\,|\,1)$.

$L_1S\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet für $v = 2$ die *x*-*z*-Ebene in $S'(4{,}5\,|\,0\,|\,3)$.

Das Dreieck $B'C'S'$ ist wegen $|\overline{B'S'}| = \sqrt{1{,}125^2 + 2^2}\ \text{m} = |\overline{C'S'}|$ gleichschenklig.
Es hat die Grundseitenlänge $|\overline{B'C'}| = 2{,}25\ \text{m}$ und die Höhe 2 m. Sein Flächeninhalt beträgt daher $2{,}25\ \text{m}^2$.

(2) Die Lichtquelle befindet sich nun im Punkt $L_2(5\,|\,9\,|\,1)$.

Auch bei dieser Position der Lichtquelle wird offenbar nur die Pyramidenfläche *BCS* von den Lichtstrahlen getroffen. Der Schatten der Pyramide ist ebenfalls ein Dreieck. Dieses ist jedoch nicht gleichschenklig wie das Schattendreieck $B'C'S'$ aus (1).

Modelllösung d)

(1) Der gesuchte Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten ist insbesondere Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{AS}. [M ist hier ein anderer Punkt als der Mittelpunkt der Pyramidengrundfläche aus der Lösung von a).] m_{AB} verläuft durch den Mittelpunkt $M_{AB}(5\,|\,4{,}5\,|\,1)$ der Strecke $\overline{AB}$. Ein beliebiger Richtungsvektor $\vec{v}$ von m_{AB} ist senkrecht sowohl zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als auch zum Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{ABS} (siehe Teilaufgabe b)). Dies ist z. B. für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Fall. Es gilt

$$m_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

m_{AS} verläuft durch den Mittelpunkt $M_{AS}(4{,}75\,|\,4{,}25\,|\,1{,}5)$ der Strecke $\overline{AS}$.

Ein beliebiger Richtungsvektor $\vec{w}$ von m_{AS} ist senkrecht sowohl zum Vektor $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ als auch zum Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wie oben. Dies ist z. B. für $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Fall. Es gilt $m_{AS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + s_M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t_M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ergibt } t_M = 0{,}05 \text{ und } s_M = -0{,}2.$$

Der gesuchte Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist $M(4{,}8\,|\,4{,}5\,|\,1{,}4)$.

(2) Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur *x*-*z*-Ebene. Offenbar befindet sich die gesuchte Position *P* der Laser-Lichtquelle an der vorderen Hallenwand (vgl. *Abbildung*). Daher gilt für die *x*-Koordinate von *P*: $x_P = 9$.

Aus $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 9 \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = 2{,}1$ und $z_P = 3{,}5$. [Für $x_P = 0$ ergäbe sich $r = -2{,}4$ und $z_P = -1$ und somit eine Position *P* unterhalb der Halle.]

$P(9\,|\,4{,}5\,|\,3{,}5)$ ist die gesuchte Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.

[Andere Argumentationen sind möglich.]

Modelllösung e)

Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $QR: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. [Da seine Ausbreitung auf die Halle, d. h. auf die Strecke $\overline{QR}$ beschränkt ist, gilt $0 \le r \le 1$.]

Die Punkte der Ebene $E_{BCS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gehören genau dann zur Seitenfläche *BCS* der Pyramide, wenn gilt: $s \ge 0$, $t \ge 0$ und $s + t \le 1$. [Bei anderer Wahl der Richtungsvektoren sind die Bedingungen für die Parameter entsprechend anzupassen.]

Die Bedingung für den Schnittpunkt *T* der Geraden *QR* mit der Ebene E_{BCS} ist

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r_T \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s_T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_T \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcl} 4 - 8r_T + s_T + 0{,}5t_T & = & 0 \\ 2 - 4r_T + 0{,}5t_T & = & 0 \\ 2 - 3r_T - t_T & = & 0 \end{array} \right|.$$

Daraus ergibt sich $r = \frac{6}{11}$, $s = \frac{2}{11}$ und $t = \frac{4}{11}$. Da $s \ge 0$, $t \ge 0$ und $s + t \le 1$ erfüllt ist [und die Laser-Lichtquelle oberhalb der Pyramide positioniert ist], trifft der zweite Laserstrahl die Seitenfläche *BCS* der Pyramide.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten $S(4{,}5 \mid 4{,}5 \mid 2)$ hat.	3
2	(2) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABS*.	3
3	(3) bestimmt das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt, unter welchem Winkel die Seitenfläche *ABS* der Pyramide gegen ihre Grundfläche *ABCD* geneigt ist.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt die Koordinaten der Eckpunkte des Schattendreiecks.	6
2	(1) zeigt, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.	2
3	(1) berechnet seinen Flächeninhalt.	2
4	(2) beschreibt die Form des neuen Pyramidenschattens im Vergleich zum Schatten aus b) (1).	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt rechnerisch die Koordinaten von *M*.	8
2	(2) ermittelt die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	zeigt, dass der zweite Laserstrahl die Seitenfläche *BCS* der Pyramide trifft.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	3			
2	(2) berechnet die Seitenlängen …	3			
3	(3) bestimmt das Volumen …	5			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt, unter welchem …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Koordinaten …	6			
2	(1) zeigt, dass es …	2			
3	(1) berechnet seinen Flächeninhalt.	2			
4	(2) beschreibt die Form …	2			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt rechnerisch die …	8			
2	(2) ermittelt die Koordinaten …	5			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**13**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass der …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0