

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 2:

- Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

2. Medien/Materialien

- entfällt

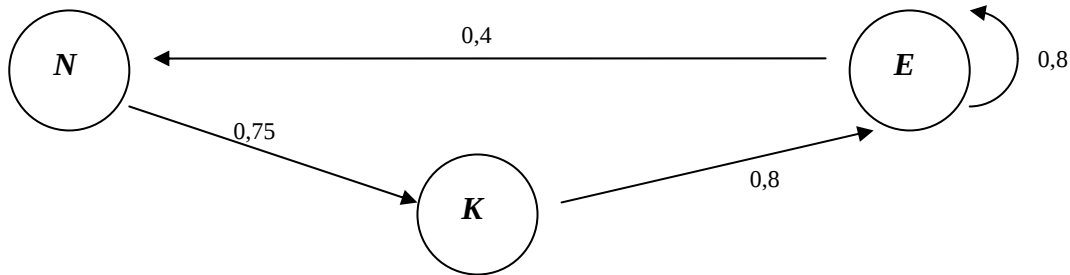
5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modellösungen

Modellösung a)



Das Matrixelement $a_{13} = 0,4$ („von E nach N“) gibt die Geburtenrate in der Rinderherde an, d. h., 40 % der erwachsenen Tiere bekommen innerhalb eines Jahres Nachwuchs.

Das Matrixelement $a_{33} = 0,8$ („von E nach E“) gibt den Anteil der in der Herde verbleibenden erwachsenen Tiere an, d. h., 80 % der erwachsenen Tiere bleiben in der Herde.

Es erreichen $0,75 \cdot 0,8 = 0,6 = 60$ % der Neugeborenen das Erwachsenenstadium.

Modellösung b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Damit sind es im nächsten Jahr 40 neugeborene Tiere, 30 Kälber und 200 erwachsene Tiere, im darauffolgenden Jahr sind es entsprechend 80, 30 und 184.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 25 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Damit waren im vergangenen Jahr 200 neugeborene Tiere, 25 Kälber und 100 erwachsene Tiere in der Herde.

Modelllösung c)

Eine neue Übergangsquote „von K zu E“ ist gesucht sowie eine Verteilung, die sich nicht ändert.

$$\Rightarrow \text{Ansatz: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -x + 0,4z = 0 \\ 0,75x - y = 0 \\ ay - 0,2z = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -x + 0,4z = 0 \\ -y + 0,3z = 0 \\ ay - 0,2z = 0 \end{array}$$

Da dieses LGS eine Lösung verschieden von $x = y = z = 0$ besitzen muss (da es sonst keine Rinderherde gibt), muss $a = \frac{2}{3}$ gelten, damit die beiden letzten Gleichungen abhängig sind.

(Alternative Lösungen sind hier vorstellbar.)

Damit müssen $80\% - 66,7\% = 13,3\%$ der Kälber verkauft werden.

$$\text{Damit ist dann } IL = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{N} \right\} \text{ Lösungsmenge des LGS und eine mögliche stabile}$$

Verteilung in der Rinderherde wäre z. B. 40 Neugeborene, 30 Kälber und 100 erwachsene Rinder.

Modelllösung d)

$$\text{Verteilung nach einem Krankheitsjahr: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 + x \\ 20 + y \\ 200 + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 80 + 0,4z = 40 \\ 30 + 0,75x = 150 \\ 16 + 0,8y + 160 + 0,8z = 100 \end{array}$$

Damit ergibt sich $x = 160$, $y = 5$ und $z = -100$ als Lösung.

Es müssen 160 neugeborene Rinder und 5 Kälber gekauft und 100 erwachsene Rinder verkauft werden.

Alternative Lösung zu d):

Verteilung nach Krankheitsjahr 40, 20, 200. Aber es sollten 40, 150, 100 herauskommen.

$z \cdot 0,4 = 40$, also $z = 100$. Da 200 da sind, müssen 100 verkauft werden.

$x \cdot 0,75 = 150$, also $x = 200$. Da 40 da sind, müssen 160 dazugekauft werden.

$y \cdot 0,8 + z \cdot 0,8 = 100$. Wegen $z = 100$ muss gelten: $y \cdot 0,8 = 20$, also $y = 25$.

Davon sind 20 schon da, also 5 dazukaufen.

Modelllösung e)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Die Matrix C enthält die Übergangquoten nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 176 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr eine Verteilung von 80 Neugeborenen, 30 Kälbern und 176 erwachsenen Rindern in der Herde, wenn man von der Anfangsverteilung in b) ausgeht.

6.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
	Der Prüfling	
1	stellt die Entwicklung in der Herde durch einen Übergangsgraphen dar.	3 (I)
2	beschreibt die biologische Bedeutung von a_{13} .	2 (II)
3	bestimmt den Anteil der erwachsenen Tiere, die in der Herde verblieben sind.	2 (II)
4	bestimmt den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die Verteilung für das nächste Jahr.	2 (I)
2	berechnet die Verteilung für das übernächste Jahr.	2 (I)
3	bestimmt die Verteilung für das vergangene Jahr.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt, dass eine neue Übergangsquote a „von K nach E“ gesucht ist.	2 (II)
2	erstellt LGS zur Ermittlung von a .	3 (II)
3	bestimmt die Lösung des LGS und daraus die neue Übergangsquote a .	3 (III)
4	bestimmt eine mögliche stabile Verteilung.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet die Verteilung nach einem Krankheitsjahr.	2 (I)
2	ermittelt ein LGS als Ansatz zur Lösung der Fragestellung.	3 (III)
3	ermittelt die Lösung des LGS oder ermittelt die Lösung alternativ.	5 (II)
4	gibt eine Antwort auf die Fragestellung an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet $C = A \cdot B$ und $C \cdot \vec{v}$.	4 (I)
2	interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
1	stellt die Entwicklung ...	3 (I)			
2	beschreibt die biologische ...	2 (II)			
3	bestimmt den Anteil ...	2 (II)			
4	bestimmt den Anteil ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10)					
Summe Teilaufgabe a)		10			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	berechnet die Verteilung ...	2 (I)			
2	berechnet die Verteilung ...	2 (I)			
3	bestimmt die Verteilung ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe b)		8			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt, dass eine ...	2 (II)			
2	erstellt LGS zur ...	3 (II)			
3	bestimmt die Lösung ...	3 (III)			
4	bestimmt eine mögliche ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe c)		12			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	berechnet die Verteilung ...	2 (I)			
2	ermittelt ein LGS ...	3 (III)			
3	ermittelt die Lösung ...	5 (II)			
4	gibt eine Antwort ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe d)		12			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	berechnet $C = A \cdot B$ und $C \cdot \vec{v}$.	4 (I)			
2	interpretiert die Ergebnisse ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe e)		8			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0