

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 2:

- Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

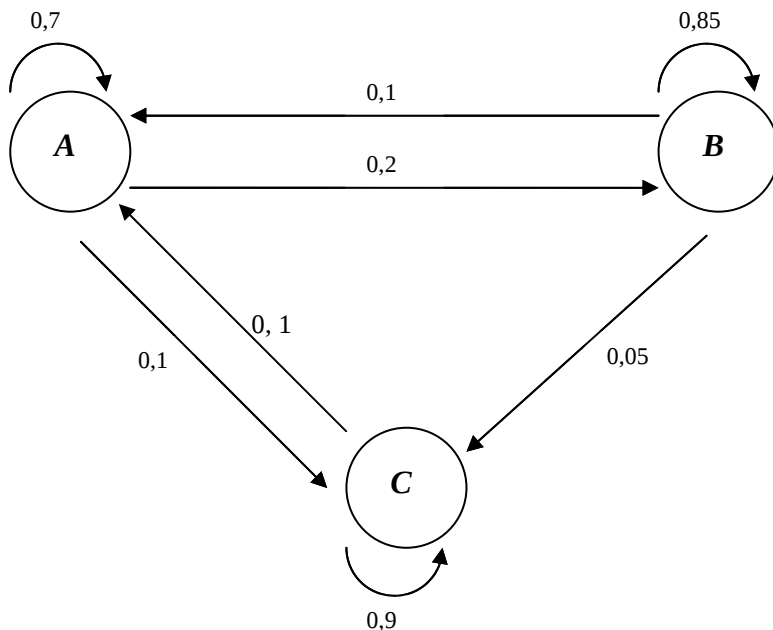
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modellösungen

Modellösung a)

Ein mögliches Übergangsdiagramm:



Beispielsweise bedeutet die 1. Spalte der Matrix M , dass 70 % an ihrem Standort A bleiben, 20 % von A zu Standort B und 10 % von A zu Standort C wechseln.

Die 2. Zeile der Matrix M bedeutet, dass 20 % von A zu Standort B wechseln, 85 % an ihrem Standort B bleiben und keiner von C zu Standort B wechselt.

Modellösung b)

Der Startvektor lautet: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Verteilung nach einem Jahr: } \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\text{Verteilung nach zwei Jahren: } \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 372 \\ 204 \end{pmatrix}$$

Modelllösung c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,16 & 0,16 \\ 0,31 & 0,7425 & 0,02 \\ 0,17 & 0,0975 & 0,82 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix gibt an, welcher Prozentsatz der Mitarbeiter eines jeden Standortes nach jeweils 2 Jahren zu den jeweiligen anderen Standorten übergeht.

Modelllösung d)

Die Matrix beschreibt die Übergangsquoten für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Da die 1. Zeile aus nahezu identischen Zahlen besteht (ca. 0,25), kann man davon ausgehen, dass etwa 25 % der Mitarbeiter, also ca. 300, nach 10 Jahren am Standort A arbeiten werden und sich diese Zahl unter den gegebenen Bedingungen auch nicht mehr wesentlich ändern wird.

Die Zahlen der übrigen Zeilen lassen einen so konkreten Schluss nicht zu, weil sie noch nicht stabilisiert erscheinen.

Alternative Lösung, die auch anerkannt wird:

Die Matrix soll die Übergangsquoten für einen Zeitraum von 10 Jahren beschreiben, aber es ist fraglich, ob die Firma wirklich so lange im Voraus planen kann. Sicherlich wird sich irgendetwas verändern.

Modelllösung e)

Ansatz über das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liefert:

$$\begin{cases} -0,3x + 0,1y + 0,1z = 0 \\ 0,2x - 0,15y = 0 \\ 0,1x + 0,05y - 0,1z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,75y \\ z = 1,25y \end{cases}$$

Da $x + y + z = 0,75y + y + 1,25y = 1200$ gilt, ändert sich die Verteilung zu $x = 300$, $y = 400$ und $z = 500$ in den Folgejahren nicht mehr.

Modelllösung f)

In der 1. Spalte der neuen Matrix A^* müssen a und $0,8 - a$ als Übergangsquoten vorkommen.

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,8 - a & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ a & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - a & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ a & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 - 1200a \\ 240 \\ 1200a \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} 960 - 1200a \\ 240 \\ 1200a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 - a & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,85 & 0 \\ a & 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 960 - 1200a \\ 240 \\ 1200a \end{pmatrix}$$

(Ein Ansatz über $(A^*)^2$ ist ebenfalls möglich.)

Die Bedingung „500 Mitarbeiter in A“ liefert die Gleichung:

$$(0,8 - a)(960 - 1200a) + 24 + 120a = 500 \Leftrightarrow 1200a^2 - 1800a + 292 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = 1,315 \vee a = 0,185.$$

Da der 1. Wert größer als 1 ist, liefert $a = 0,185$ den gesuchten Anteil.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
	Der Prüfling	
1	stellt die Entwicklung in einem Übergangsdigramm dar.	4 (I)
2	erklärt eine Zeile und eine Spalte der Matrix M .	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	gibt den Startvektor an.	2 (I)
2	berechnet die Verteilung des 1. Folgejahres.	2 (I)
3	berechnet die Verteilung des 2. Folgejahres.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt das Matrizenprodukt M^2 .	4 (II)
2	interpretiert die Koeffizienten von M^2 .	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	gibt die Bedeutung der Matrix M^{10} an.	2 (I)
2	interpretiert die 1. Zeile von M^{10} .	3 (III)
3	interpretiert die 2. und die 3. Zeile von M^{10} .	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	untersucht die Problemstellung mit Hilfe eines LGS.	2 (II)
2	bestimmt die Lösung des LGS.	5 (II)
3	gibt die Verteilung an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt die neue Übergangsmatrix A^* in Abhängigkeit von a .	3 (II)
2	ermittelt eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von a .	5 (III)
3	bestimmt die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung.	3 (II)
4	begründet, dass nur eine der beiden Lösungen in Frage kommt.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
1	stellt die Entwicklung ...	4 (I)			
2	erklärt eine Zeile ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe a)		8			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	gibt den Startvektor ...	2 (I)			
2	berechnet die Verteilung ...	2 (I)			
3	berechnet die Verteilung ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6)					
Summe Teilaufgabe b)		6			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt das Matrizenprodukt ...	4 (II)			
2	interpretiert die Koeffizienten ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7)					
Summe Teilaufgabe c)		7			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	gibt die Bedeutung ...	2 (I)			
2	interpretiert die 1. Zeile ...	3 (III)			
3	interpretiert die 2. und ...	2 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (7)					
Summe Teilaufgabe d)		7			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	untersucht die Problemstellung ...	2 (II)			
2	bestimmt die Lösung ...	5 (II)			
3	gibt die Verteilung ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9)					
Summe Teilaufgabe e)		9			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	bestimmt die neue ...	3 (II)			
2	ermittelt eine quadratische ...	5 (III)			
3	bestimmt die beiden ...	3 (II)			
4	begründet, dass nur ...	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13)					
	Summe Teilaufgabe f)	13			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0