Binomialverteilungen

1. a) Berechne $\binom{24}{9}$ und $\binom{24}{15}$ und vergleiche die Ergebnisse.

   b) Zeige, dass allgemein gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   Erläutere die Gleichheit auch mit einem Urnenexperiment.
   Inwiefern ist b) die allgemeine Antwort auf den Vergleich in a)?

   c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto 4 Richtige zu tippen.

   d) Aus vier Klassen mit je 25 Schüler/innen werden 20 zufällig ausgewählt.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
   - die 20 Schüler/innen aus allen 100 ausgewählt werden?
   - aus jeder Klasse je 5 Schüler/innen ausgewählt werden?

   Erläutere, warum die zweite Zahl (hoffentlich!) kleiner ist als die erste.
   Die erste Zahl ist enorm größer; um welchen Faktor?

2. a) Bei einem Test mit 12 Fragen und je 3 Ankreuzmöglichkeiten, von denen nur eine richtig ist, besteht man mit mehr als 10 richtigen Antworten.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Raten zu bestehen? Bewerte sie.

   b) Berechne: $P_{15;0,25}(X = 5)$, $P_{60;0,65}(35 < X < 38)$.

3. a) Bestimme mit den Tabellen zu kumulierten Binomialverteilungen
   $P_{20;0,2}(X \leq 5)$, $P_{50;0,25}(X < 10)$, $P_{10;0,5}(X > 5)$, $P_{100;0,1}(X \geq 12)$, $P_{50;0,3}(10 < X \leq 22)$

   b) Eine Münze wird 100-mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
   - mehr als 43 Wappen,
   - weniger als 36 Wappen,
   - mehr als 35, aber höchstens 43 Wappen.

   c) Erläutere: die drei Wahrscheinlichkeiten in b ergeben zusammen (hoffentlich!) 100 %.

4. a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten
   $P_{50;0,7}(X > 40)$, $P_{100;0,9}(X \leq 76)$, $P_{10;0,6}(X \geq 7)$, $P_{20;0,75}(X < 12)$, $P_{100;0,8}(77 \leq X < 83)$

   b) Ein Heimwerker kauft eine 50er-Packung Nägel. Erfahrungsgemäß gelingt es ihm, 90 % beim Einschlagen nicht krumm zu schlagen, sondern tatsächlich richtig zu verwenden. Für eine Bude, die er für seine Kinder bauen will, benötigt er nach seiner Kalkulation 40 Nägel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Nägelpackung?

   c) Ein Super-Mathematiker mit gesundem Unterrichtsschlaf löst die Aufgabe durch Berechnung der Wahrscheinlichkeit für X = 40. Welches Ergebnis erhält er? Kommentiere den Lösungsversuch.

5. a) Bestimme die k-Werte, bei denen die Wahrscheinlichkeit erstmals unter bzw. über dem angegebenen Wert liegt:
   $P_{20;0,4}(X \leq k) \leq 0{,}75$; $P_{50;0,3}(X > k) \geq 0{,}15$; $P_{100;0,8}(X \geq k) \leq 0{,}6$; $P_{10;0,6}(X < k) \geq 0{,}35$.

   b) Der multiple-choice-Test aus Aufgabe 2. a) wird auf 20 Aufgaben mit je 5 Antwortmöglichkeiten erhöht. Dafür wird die Bestehensbedingung erleichtert. Durch bloßes Raten kann man ihn immerhin mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 3 % bestehen. Wie viele Aufgaben müssen mindestens gelöst werden fürs Bestehen?

   c) Wie müsste die Bestehensregel in 5. b) lauten, wenn jede Einzel-Aufgabe mit p = 70 % gelöst würde?

   d) Erläutere, wieso die Bestehensregeln in b) und c) so verschieden ausfallen.

1. a) $\binom{24}{9} = \binom{24}{15}$ = 1 367 504. Die Ergebnisse sind gleich.

   b) ■ $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$

   ■ Nimmt jemand aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k heraus ohne Beachtung der Reihenfolge, so kann er die k Kugeln in der Hand als gezogene betrachten mit $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Oder er betrachtet die n - k Kugeln, die in der Urne bleiben, als gezogene mit $\binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten.

   Da beide Male dieselbe Handlung vorliegt, ist die Anzahl der Möglichkeiten gleich.

   ■ Mit n = 24, k = 9 und n - k = 24 - 9 = 15 ergibt sich aus b) die konkrete Situation in a).

   c) Die 4 Richtigen stammen aus den 6 Richtigen, die es insgesamt gibt. Da es auf die zeitliche Ziehungs- bzw. Ankreuzreihenfolge nicht ankommt, gibt es dafür $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten. Die 2 Falschen gehören zu den insgesamt 43 nicht gezogenen Zahlen und es gibt $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten dafür.

   Insgesamt gibt es $\binom{49}{6}$ Fälle, überhaupt einen Tippschein auszufüllen.

   $$\text{P(4 Richtige im Lotto)} = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{15\cdot 903}{13\,983\,816} \approx 9{,}7\cdot 10^{-4} \approx 0{,}1\ \%$$

   d) $\binom{100}{20} \approx 5{,}36\cdot 10^{20}$; $\binom{25}{5}\cdot\binom{25}{5}\cdot\binom{25}{5}\cdot\binom{25}{5} \approx 8{,}0\cdot 10^{18}$

   Bei der zweiten Wahlmöglichkeit sind alle Fälle, in denen aus den Klassen verschieden viele Schüler/innen stammen, nicht berücksichtigt.

   $\frac{5{,}35\cdot 10^{20}}{8{,}0\cdot 10^{18}} = 67$

   Die erste Wahlmöglichkeit erlaubt rund 67 Mal so viele Wahlen.

2. a) X: Zahl der richtigen Antworten; n = 12; $p = \frac{1}{3}$

   P(X > 10) = P(X = 11) + P(X = 12)

   $= \binom{12}{11}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + \binom{12}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \approx 4{,}5\cdot 10^{-5} + 1{,}9\cdot 10^{-6} \approx 4{,}7\cdot 10^{-5}$

   Die Wahrscheinlichkeit durch Raten zu bestehen ist mit $4{,}7\cdot 10^{-5}$ verschwindend gering.

   b) $P_{15;\,0,25}(X = 5) = \binom{15}{5}\cdot 0{,}25^{5}\cdot 0{,}75^{10} \approx 16{,}5\ \%$

   $P_{60;\,0,65}(35 < X < 38) = P(X = 36) + P(X = 37)$

$= \binom{60}{36} \cdot 0{,}65^{36} \cdot 0{,}35^{24} + \binom{60}{37} \cdot 0{,}65^{37} \cdot 0{,}35^{23} \approx 7{,}6\ \% + 9{,}1\ \% = 16{,}7\ \%$

3. a) $P_{20;\,0,2}(X \leq 5) \approx 80{,}4\ \%$

$P_{50;\,0,25}(X < 10) = P(X \leq 9) = 16{,}4\ \%$

$P_{10;\,0,5}(\underset{6,7,\ldots,10}{X > 5}) = 1 - (\underset{0,1,\ldots,5}{X \leq 5}) \approx 1 - 62{,}2\ \% = 37{,}8\ \%$

$P_{100;\,0,1}(\underset{12,13,\ldots,100}{X \geq 12}) = 1 - P(\underset{0,1,\ldots,11}{X \leq 11}) \approx 1 - 70{,}3\ \% = 29{,}7\ \%$

$P_{50;\,0,3}(\underset{11,12,\ldots,22}{10 < X \leq 22}) = P(\underset{0,1,\ldots,22}{X \leq 22}) - P(\underset{0,1,\ldots,10}{X \leq 10}) \approx 98{,}8\ \% - 7{,}9\ \% \approx 90{,}9\ \%$

b) X: Zahl der Wappen; $n = 100$; $p = 0{,}5$

$P(\underset{44,45,\ldots,100}{X > 43}) = 1 - P(\underset{0,1,\ldots,43}{X \leq 43}) \approx 1 - 9{,}7\ \% \approx 90{,}3\ \%$

$P(\underset{0,1,\ldots,35}{X < 36}) = P(X \leq 35) \approx 0{,}2\ \%$

$P(\underset{36,37,\ldots,43}{35 < X \leq 43}) = P(\underset{0,1,\ldots,43}{X \leq 43}) - P(\underset{0,1,\ldots,35}{X \leq 35}) \approx 9{,}7\ \% - 0{,}2\ \% \approx 9{,}5\ \%$

c) $90{,}3\ \% + 0{,}2\ \% + 9{,}5\ \% = 100\ \%$

Die Summe der Fälle umfasst 0,1, …, 35; – 36, 37, …, 43; – 44, 45, …, 100, also alle Fälle von 0 bis 100. Die Wahrscheinlichkeit für alle Fälle beträgt 100 %.

4. a) $P_{50;\,0,7}(X > 40) = 1 - P(\underset{0,1,\ldots,40}{X \leq 40}) \approx 1 - 96{,}0\ \% = 4{,}0\ \%$

$P_{100;\,0,9}(X \leq 76) \approx 0$

$P_{10;\,0,6}(\underset{7,8,\ldots,10}{X \geq 7}) = 1 - P(\underset{0,1,\ldots,6}{X \leq 6}) \approx 1 - 61{,}8\ \% \approx 38{,}2\ \%$

$P_{20;\,0,75}(\underset{0,1,\ldots,11}{X < 12}) = P(X \leq 11) \approx 4{,}1\ \%$

$P_{100;\,0,8}(\underset{77,78,\ldots,82}{77 \leq X < 83}) = P(\underset{0,1,\ldots,82}{X \leq 82}) - P(\underset{0,1,\ldots,76}{X \leq 76}) \approx 72{,}9\ \% - 18{,}9\ \% \approx 54{,}0\ \%$

b) X: Zahl der erfolgreich benutzten Nägel; $n = 50$; $p = 0{,}9$

$P(\underset{40,41,\ldots,50}{X \geq 40}) = 1 - P(\underset{0,1,\ldots,39}{X \leq 39}) \approx 1 - 0{,}9\ \% \approx 99{,}1\ \%$

Die Nägelpackung reicht mit 99,1 %, also sicher.

c) $P_{50,0,9}(X = 40) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}9^{40} \cdot 0{,}1^{10} \approx 1{,}5\ \%$

Bleiben mehr als 40 Nägel benutzbar oder werden weniger als 10 krumm geschlagen, dann reicht die Packung auch. Das ist nicht berücksichtigt.

5. a)
- ★ $P_{20\ 0,4}(X \leq k) \leq 0{,}75$

  $P(X \leq 8) \approx 0{,}60$; $P(X \leq 9) \approx 75{,}5\ \% \Rightarrow k = 8$
- ★ $P_{50\ 0,3}(X > k) \geq 0{,}15$

  $1 - P_{50;\,0,3}(X \geq k) \geq 0{,}15 \Leftrightarrow 1 \geq 0{,}15 + P(X \leq k) \Leftrightarrow 0{,}85 \geq P(X \leq k) \Leftrightarrow$
  $P(X \leq k) \leq 0{,}85$

  $P(X \leq 17) \approx 78{,}2\ \%$; $P(X \leq 18) \approx 85{,}9\ \% \Rightarrow k = 17$
- ★ $P_{100\ 0,8}(X \geq k) \leq 0{,}6$

  $1 - P(X \leq k - 1) \leq 0{,}6 \Leftrightarrow 1 \leq 0{,}6 + P(X \leq k - 1) \Leftrightarrow 0{,}4 \leq P(X \leq k - 1) \Leftrightarrow$
  $P(X \leq k - 1) \geq 0{,}4$

  $P(X \leq 78) \approx 34{,}6\ \%$; $P(X \leq 79) \approx 44{,}1\ \% \Rightarrow k - 1 = 79 \Rightarrow k = 80$

★ $P_{10\ 0,6}(X < k) \geq 0,35$

$P(X \leq k - 1) \geq 0,35$

$P(X \leq 4) \approx 16,6$ %; $P(X \leq 5) \approx 36,7$ % $\Rightarrow k - 1 = 5 \Rightarrow k = 6$

b) X: Zahl der richtigen Antworten; $n = 20$; $p = 0,2$

$P(X \geq k) \approx 3$ %

$1 - P(X \leq k - 1) \approx 3$ % $\Leftrightarrow 1 \approx 0,03 + P(X \leq k - 1) \Leftrightarrow P(X \leq k - 1) \approx 0,97$

$P(X \leq 7) \approx 96,8$ %; $P(X \leq 8) \approx 99,0$ % $\Rightarrow k - 1 = 7 \Rightarrow k = 8$

Wer 8 oder mehr Aufgaben von den 20 richtig beantwortet, der besteht den Test.

c) X, n wie oben; $p = 0,2$

$P(X \geq k) \approx 3$ %

$1 - P(X \leq k - 1) \approx 3$ % $\Leftrightarrow P(X \leq k - 1) \approx 97$ %

$P(X \leq 17) \approx 96,5$ %; $P(X \leq 18) \approx 99,2$ % $\Rightarrow k - 1 = 17 \Rightarrow k = 18$

Wer 18 oder mehr Aufgaben von den 20 richtig beantwortet, der besteht den Test.

d) Mit $p = 0,2$ (in b) ist es sehr unwahrscheinlich, viele Aufgabenlösungen richtig zu raten. Schon ab 8 richtig geratenen Aufgaben liegt die Wahrscheinlichkeit bei etwa 3 %. Bei $p = 0,7$ (in c) rät man dagegen mit hoher Wahrscheinlichkeit richtig. Erst ab 18 liegt die Ratewahrscheinlichkeit bei etwa 3 %.

Anmerkungen:

In Anlehnung/Weiterführung an/von Aufgabe 5 sollten im Hinblick auf das Hypothesentesten Fragen des folgenden Formats besprochen werden:

Angenommen, man entwirft einen Multiple-Choice-Test mit 20 Fragen und jeweils 4 Ankreuzmöglichkeiten. Wie viele Fragen müssen von den Prüflingen mindestens richtig angekreuzt werden, damit z.B. höchstens 5 von 100 Prüflinge nur durch zufälliges Raten den Test bestehen?

Gesucht ist also k, so dass $P_{20,\,0,25}(X \geq k) \leq 0,05$
Andere analoge Schreibweisen (wobei hier k das Minimum der richtig anzukreuzenden Fragen ist und X die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist) sind natürlich ebenfalls denkbar: Z.B. $P_{20,\,0,25}(X < k) > 0,95$
Erfahrungsgemäß fällt diese Schreibweise und Denkart vielen Schülern zunächst sehr schwer. Gute Hilfen sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Wertetabelle geschrieben und Verteilungsdiagramme als Histogramme gezeichnet.
Hier braucht es auch 2 oder 3 weitere Aufgaben dieser Art, damit Verständnis und Schreibweise „ins Blut“ übergeht!