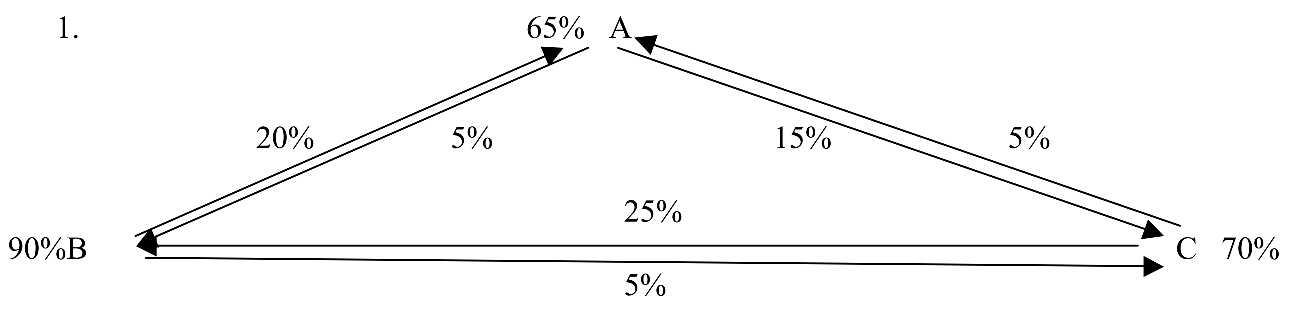
Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Felix Hasenau, Q2, 2015/16	**X**	**Übergangsmatrizen**

Einen Monat vor den Bundestagswahlen liegt die Partei A in Umfragen bei 40%, die Partei B bei 25 % und die Partei C bei 20%. Die restlichen 15% verteilen sich auf kleine Splitterparteien und sind an dieser Stelle zu vernachlässigen.
Vorherige Umfragen haben gezeigt, dass eine monatliche Wählerwanderung von der Partei A zur Partei B (20%) und zur Partei C (15%) statt. Die restlichen 65% verbleiben bei Partei A. Die Partei B hingegen macht bessere Politik. 90% der Wählerschaft verbleiben bei ihr, jeweils 5% wechseln zu A und C. Der Partei C hingegen bleiben 70% treu, während 25% zur Partei B wechseln und 5% im nächsten Monat Partei A wählen.
Aufgaben:

1. Stelle die angegebenen Verteilungen in einem Übergangsdiagramm dar.
2. Berechne die Wählerverteilung zur Bundestagswahl.
3. Berechne die absoluten Wählerzahlen, wenn man von einer Wählerschaft von 50.000.000 Wählern ausgeht.

Lösung

1.



2. A= 28,25%
   B=35,5%
   C=21,25%

3. A= 0,2825 x 50.000.000 = 14.125.000
   B= 0,355 x 50.000.000 = 17.750.000
   C= 0,2125 x 50.000.000 = 10.625.000

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Marie Sprenger, Q2, 2016	*	**Matrizen**

Die Westfalenpost hat drei verschiedene Zeitungstypen A, B und C, die man jeweils für 1 Jahr abonnieren kann. Die Tabelle zeigt wie viel Prozent der Empfänger bei ihrem Zeitungstyp bleiben und wie viele ihren Zeitungstyp wechseln.

Nach/Von	A	B	C
A	0,3	0,5	0,1
B	0,2	0,4	0,3
C	0,5	0,1	0,6

a) Erstelle die passende graphische Darstellung.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wechseln die Empfänger von Typ A,B,C

…nach 2 Jahren zu Typ A

Typ B

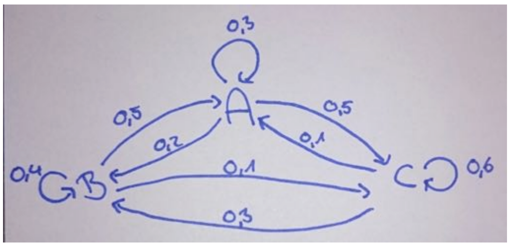
Typ C

…nach 5 Jahren zu Typ A?

c) Geben Sie die Grenzmatrix an.

Lösung

a)



b)

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}24 & 0{,}36 & 0{,}24 \\ 0{,}29 & 0{,}29 & 0{,}32 \\ 0{,}47 & 0{,}35 & 0{,}44 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}$$

Nach 2 Jahren von Typ A zu Typ A: 0,24; zu Typ B: 0,29; zu Typ C: 0,47

Typ B zu Typ A: 0,36…

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0{,}276 & 0{,}276 & 0{,}276 \\ 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}303 \\ 0{,}421 & 0{,}421 & 0{,}421 \end{pmatrix}$$

→ Nach 5 Jahren beträgt die Wahrscheinlichkeit bei Typ A geblieben zu sein 27,6 %

c) Durch ausprobieren liegt die Grenzmatrix bei 6 Jahren

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0{,}2763 & 0{,}2763 & 0{,}2763 \\ 0{,}3026 & 0{,}3026 & 0{,}3026 \\ 0{,}4210 & 0{,}4210 & 0{,}4210 \end{pmatrix}$$

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Carina Voß Q2	**xx**	**Grenzmatrix**

In einem Einkaufscenter sind 3 Geschäfte welche Anziehsachen anbieten. Es würden 100 Kunden befragt in welchem Geschäft sie einkaufen waren, dies an 3 verschiedenen Tagen.

	Tag 1	**Tag 2**	**Tag 3**
Geschäft 1	20	30	20
Geschäft 2	40	20	50
Geschäft 3	40	50	30

Berechne mit Hilfe der Grenzmatrix wie viele von 100 Menschen im Durchschnitt Geschäft 1, Geschäft 2 und Geschäft 3 besuchen und die jeweiligen Zahlenwerte.

Lösung

Rechnung

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

I	$0,2a+0,3b+0,2c=a$	$\mid -a$	I	$-0,8a+0,3b+0,2c=0$
II	$0,4a+0,2b+0,5c=b$	$\mid -b$	II	$0,4a-0,8b+0,5c=0$
III	$0,4a+0,5b+0,3c=c$	$\mid -c$	III	$0,4a+0,5b-0,7c=0$

II-III	$-1,3b+1,2c=0$	$\mid +1,3b$	I*5 –II*2	$-4,8a+3,1=0$	$\mid +4,8a$
	$1,2c=1,3b$	$\mid :1,2$		$3,1b=4,8a$	$\mid :4,8$
	$c=13/12$			$a=31/48$	

$$\begin{pmatrix} 31/48\,b \\ b \\ 13/12\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/48 \\ 1 \\ 13/12 \end{pmatrix} * b$$

Addieren = 131/48

Vektor/Summe → Fixvektor

Fixvektor:

$$\begin{pmatrix} 31/131 \\ 48/131 \\ 52/131 \end{pmatrix}$$

Grenzmatrix:

$$\begin{pmatrix} 31/131 & 31/131 & 31/131 \\ 48/131 & 84/131 & 48/131 \\ 52/131 & 52/131 & 52/131 \end{pmatrix}$$

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Julian S. – Q2 – 2015/16	**XX**	**Matrizenmultiplikation**

Gegeben sind:

Matrix A:

6	3	-2
1	0	8
-5	2	4

Matrix B:

-6	9	0
1	2	4

a) Erläutere, was es bei der Matrizenmultiplikation zu beachten gibt und wie man die Größe der Lösungsmatrix bestimmt!

b) Multipliziere die Matrizen!

Lösung

a)

Die Reihenfolge ist hier unbedingt zu beachten! Eine Multiplikation ist nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten des ersten Faktors mit der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors übereinstimmen. Hier ist also nur die Rechnung Matrix B x Matrix A möglich.
Die Lösungsmatrix hat die Zeilen von Faktor 1 und Spalten von Faktor 2, also hier 3x2.

b)

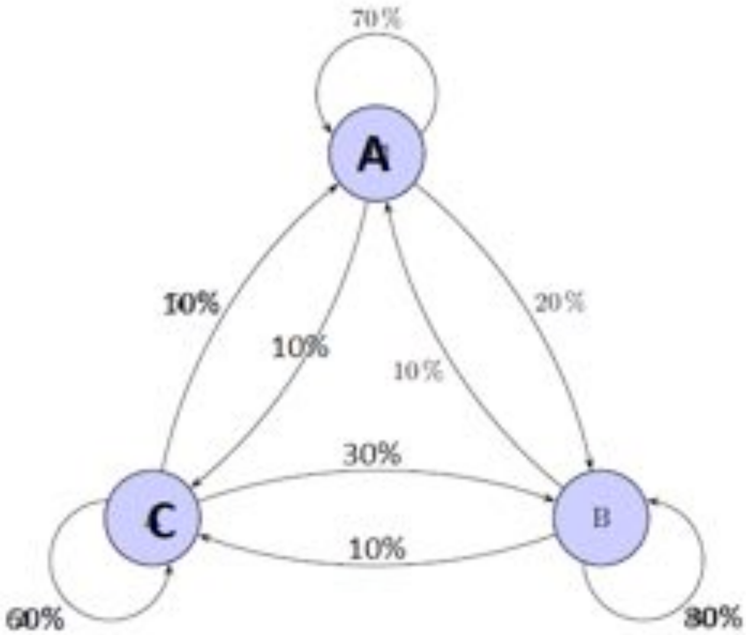
-27	-18	84
-12	11	30

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Luc Fischer, Q2, 2015/16	**X**	**Matrizen**

In einem Dorf mit 1000 Einwohnern gibt es 3 Bäcker bei denen Brötchen eingekauft werden. Der Übergangsgraph zeigt das monatliche Wechselverhalten:

a) Erstelle eine Tabelle zum Wechselverhalten

b) Berechne die prozentuale Verteilung für die nächsten 5, 8, 12 Monate



Lösung

a)

	A	B	C
zu A	70%	10%	10%
zu B	20%	80%	30%
zu C	10%	10%	60%

b)

	A	B	C
Zu A	0,28	0,23	0,23
Zu B	0,51	0,56	0,54
Zu C	0,19	0,19	0,21

Matrix^{23}

	A	B	C
Zu A	0,25	0,24	0,24
Zu B	0,54	0,55	0,55
Zu C	0,19	0,19	0,2

Matrix^{233}

	A	B	C
Zu A	0,25	0,25	0,25
Zu B	0,55	0,55	0,55
Zu C	0,2	0,2	0,2

Matrix^{3333}

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Pascal Lennemann, 12, 2016	**xx**	**Übergangsmatrix**

Krankheiten und Globalisierung

Zwischen den drei Orten Arda, Beleriand und Erebor herrscht reger Personenverkehr. Jeden Tag fliegen nämlich Flieger, die immer voll besetzt sind, zwischen den Orten hin und her. Folgende Daten wurden von der Touristikbehörde Ardas veröffentlicht:

	Arda	Beleriand	Erebor
Personen im Ort	200	200	100
Pers./Tag → A.	-	20	30
Pers./Tag → B.	20	-	20
Pers./Tag → E.	40	20	-

An einem Tag infizieren sich 10 Leute in Erebor mit einer Krankheit, die eine Inkubationszeit von einer Woche hat.

a) Wie viele Infizierte befinden sich beim ersten Auftreten von Symptomen in den drei Orten und wie groß ist der prozentuale Anteil der Infizierten an der Gesamtbevölkerung in den drei Orten?

b) Deute dein Ergebnis und zeige Schwachstellen der Simulation auf.

Lösung

a)

		von		
		A.	B.	E.
nach	A.	$\frac{140}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{30}{100}$
	B.	$\frac{20}{200}$	$\frac{160}{200}$	$\frac{20}{100}$
	E.	$\frac{40}{200}$	$\frac{20}{200}$	$\frac{50}{100}$

Daraus folgt die rechts abgebildete Matrix. Dabei steht x für die vergangenen Tage. Da die Inkubationszeit eine Woche beträgt, treten erste Symptome also bei $x = 7$ auf; man erhält als Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}^x$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}367 & 0{,}360 & 0{,}365 \\ 0{,}405 & 0{,}414 & 0{,}407 \\ 0{,}228 & 0{,}226 & 0{,}228 \end{pmatrix}$$

Für die Zahl der Infizierten gilt: $Infizierte_{(Ort)} = Wkt_{(Erebor \to Ort)} \cdot Wkt_{(Infizierte, Erebor)} \cdot Einwohner_{(Erebor)}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}365 \\ 0{,}407 \\ 0{,}228 \end{pmatrix} \cdot 0{,}1 \cdot 100 = \begin{pmatrix} 0{,}365 \\ 0{,}407 \\ 0{,}228 \end{pmatrix} \cdot 10 = \begin{pmatrix} 3{,}65 \\ 4{,}07 \\ 2{,}28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} Arda \approx 3 \, Infizierte \\ Beleriand \approx 4 \, Infizierte \\ Erebor \approx 2 \, Infizierte \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}367 & 0{,}360 & 0{,}365 \\ 0{,}405 & 0{,}414 & 0{,}407 \\ 0{,}228 & 0{,}226 & 0{,}228 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 181 \\ 204 \\ 113 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{3}{181} \approx 1{,}7\% \\ \frac{4}{204} \approx 2\% \\ \frac{2}{113} \approx 1{,}8\% \end{matrix}$$

b) z.B.:

- Größter prozentualer Anteil in Beleriand
  → Infektionsquelle könnte fälschlicherweise dort gesucht werden.
- Simulation berücksichtigt Infizierung der Mitmenschen der Infizierten nicht mit

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Patrik Bettendorf, Q2, 2015/16	**X**	**Grenzmatrix**

Ein Unternehmen beauftragt ein Forschungsinstitut um herauszufinden, welches von den drei Produkten, die das Unternehmen produziert, am besten angenommen wird
. Das Forschungsinstitut findet heraus, wie viele Kunden bei einem Produkt bleiben, aber auch, wie viele Kunden ein Produkt wechseln und welches Produkt sie anschließend nehmen.
Das Unternehmen möchte die Produktion eines Produkts einstellen, sodass nur noch zwei Produkte im Laden zu kaufen sind.
Welches Produkt sollte das Unternehmen aus dem Laden nehmen?
In der folgenden Matrix sind die Wahrscheinlichkeiten dargestellt, die anzeigen, ob ein Kunde einem Produkt treubleibt oder ob er ein Produkt wechselt. Wechselt er ein Produkt, so ist angegeben, wie viel Prozent der Kunden zu welchem Produkt wechseln.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ B & \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}86 & 0{,}01 \\ 0{,}08 & 0{,}02 & 0{,}91 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lösung

Um die Grenzmatrix herauszufinden, gibt man die obenstehende Matrix in den Taschenrechner ein und sucht die Grenzmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}86 & 0{,}01 \\ 0{,}08 & 0{,}02 & 0{,}91 \end{pmatrix} * x\text{^}12 = \begin{pmatrix} 0{,}3863 & 0{,}3863 & 0{,}3862 \\ 0{,}2212 & 0{,}2212 & 0{,}2211 \\ 0{,}3924 & 0{,}3924 & 0{,}3926 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}07 & 0{,}86 & 0{,}01 \\ 0{,}08 & 0{,}02 & 0{,}91 \end{pmatrix} * x\text{^}13 = \begin{pmatrix} 0{,}3862 & 0{,}3862 & 0{,}3862 \\ 0{,}2211 & 0{,}2211 & 0{,}2211 \\ 0{,}3925 & 0{,}3925 & 0{,}3925 \end{pmatrix}$$

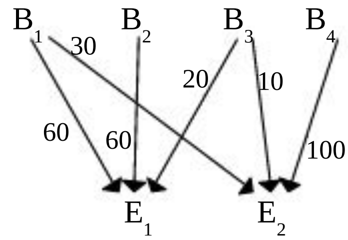
Man findet die Grenzmatrix, wenn man die vorliegende Matrix mit 13 potenziert. Aus dieser Grenzmatrix kann man entnehmen, dass nur 22,11% der Käufer Produkt B wählen, weshalb das Unternehmen dieses aus der Produktion nehmen sollte.

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Tim Nolte, Q2, 2016	**XX**	**Matrizenrechnung**

Bedarfsmatrizen – Aufgabe 1

	N_1	N_2	N_3
B_1	140	0	0
B_2	110	20	0
B_3	0	60	70
B_4	0	0	300

Vor Wintereinbruch beschließt das Volk der Roten Waldameisen ihren Ameisenhaufen um 2 Etagen auszubauen. Bei einem zweistufigen Transportprozess werden zunächst die erforderlichen Baumnadelsorten N_1, N_2 und N_3 zusammengesucht und in Blätter B_1, B_2, B_3 und B_4 verladen. In der zweiten Transportstufe werden dann die vollgeladenen Blättern von dem gesamten Ameisenvolk zu den Etagen E_1 und E_2 getragen.



1| Das nebenstehende Diagramm stellt den Bedarf an vollgeladenen Blättern für den Bau der Etagen dar. Die zur Beladung der Blätter jeweils benötigten Mengeneinheiten (**ME**) von Baumnadeln sind in der obigen Tabelle zusammengestellt.
Erstellen Sie eine Etagen-Blätter Matrix.

2| *Beschreiben Sie den Rohstoffbedarf zum Bau von E_1 und E_2 durch eine Etagen-Baumnadel-Matrix.*
Tipp: Matrix aus 1| mit Tabelle multiplizieren!

3| *Geben Sie an, wie viele* **ME** *von jeder Baumnadelsorte benötigt werden, um* ***300*** *weitere Etagen im Stil von E_1 und* ***200*** *weitere von der Sorte E_2 zu bauen.*

Lösung

1|

	N_1	N_2	N_3	N_4
E_1	60	60	20	0
E_2	30	0	10	100

2|

$$\begin{pmatrix} 60 & 60 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 10 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 110 & 20 & 0 \\ 0 & 60 & 70 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 & 2400 & 1400 \\ 4200 & 600 & 30700 \end{pmatrix}$$

$60 \cdot 140 + 60 \cdot 110 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot 0$ $\quad 60 \cdot 0 + 60 \cdot 20 + 20 \cdot 60 + 0 \cdot 0$ $\quad 60 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 20 \cdot 70 + 0 \cdot 300$

$30 \cdot 140 + 0 \cdot 110 + 10 \cdot 0 + 100 \cdot 0$ $\quad 30 \cdot 0 + 0 \cdot 20 + 10 \cdot 60 + 100 \cdot 0$ $\quad 30 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 10 \cdot 70 + 100 \cdot 300$

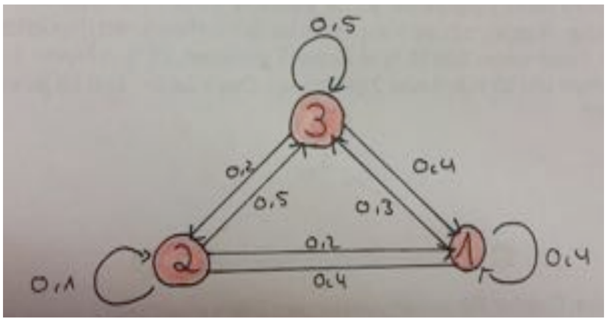
3|

$$\begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15000 & 2400 & 1400 \\ 4200 & 600 & 30700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5340000 & 840000 & 10340000 \end{pmatrix}$$

A: Es werden 5340000ME von N_1, 840000ME von N_2 und 10340000ME von N_3 benötigt.

Name, Klasse, Jahr	Schwierigkeit	Mathematisches Thema
Vivien Schachta, Q2	**X**	**Matrizenrechnung**

Mit Hilfe der Matrizenrechnung sollen die Wanderungsbewegungen einer Population von Wildschweinen beschrieben werden. In einem Diagramm werden die Wanderungszahlen auf die jeweils im Vorjahr vorhandene Population bezogen, z.B. sind von der im Vorjahr vorhandenen Population im Revier 3 nach einem Jahr 50 % im Revier 3 geblieben, 20 % in Revier 1 gewechselt und 30 % in Revier 2 gewechselt. Diese Zahlen sind für jedes Jahr konstant.



Aufgabe: Erstellen Sie zu den vorliegenden Daten eine Tabelle, indem sie diese in 3 Startreviere und 3 Zielreviere einteilen. Berechnen Sie nun, ab welchem Jahr sich die Werte stabilisieren (→ Grenzmatrix).

Lösung

		Startrevier		
		1	**2**	**3**
Zielrevier	**1**	0,1	0,2	0,2
	2	0,4	0,4	0,3
	3	0,5	0,4	0,5

Grenzmatrix:
Nach 5 Jahren haben sich die Wahrscheinlichkeiten innerhalb der Zeilen auf die gleichen Werte eingependelt (→ die Verteilung der Populationen auf die bestimmten Reviere hat sich stabilisiert). Somit ist die Grenzmatrix erreicht.

Rechnung: 5 Jahre:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{5} = \begin{pmatrix} 0{,}1818 & 0{,}1818 & 0{,}1818 \\ 0{,}3535 & 0{,}3535 & 0{,}3535 \\ 0{,}4646 & 0{,}4646 & 0{,}4646 \end{pmatrix}$$