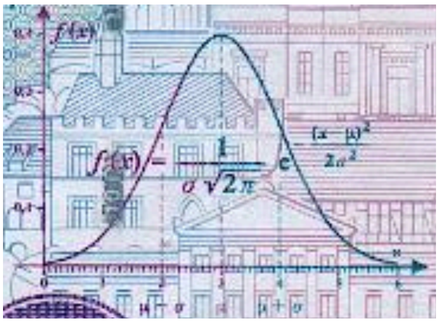
Binomialverteilungen für große n

Die Berechnung von Binomialverteilungen führt auf zwei Probleme:

- Die Berechnung von Fakultäten zum Binomialkoeffizienten ergibt sehr große Zahlen (z.B. 20! = 2.432.902.008.176.640.000). Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist deshalb numerisch aufwändig.
- Es können nur Wahrscheinlichkeiten für ganze Zahlen berechnet werden. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von Dezimalzahlen wie z.B. Körpergrößen, Wartezeiten oder Koffergewichten ist nicht möglich.

Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat eine Möglichkeit gefunden diese Probleme zu umgehen. Sein Ergebnis wurde bis 2001 (am 1.1.2002 wurde der Euro eingeführt) auf 10 DM-Scheinen abgebildet:



In etwa der Mitte des Geldscheines ist die Gleichung und der Graph der sogenannten Normalverteilungsfunktion f abgebildet:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \text{„normpdf(x, } \mu, \sigma\text{)“}$$

Außer den bekannten mathematischen Konstanten e und π kommen die griechischen Buchstaben μ („mü“) und σ („sigma“) vor. μ symbolisiert den sogenannten Erwartungswert und σ die Standardabweichung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Recherchiere:

a) Was kann man sich unter den Begriff Erwartungswert vorstellen? Wozu kann er nützlich sein? Wie kann man ihn allgemein berechnen? Wie kann man ihn bei einer Binomialverteilung berechnen?

b) Was kann man sich unter dem Begriff Standardabweichung vorstellen? Wozu kann sie nützlich sein? Wie kann man sie allgemein berechnen? Wie kann man sie bei einer Binomialverteilung berechnen?

c) Berechne die Extremstelle von f und den Flächeninhalt zwischen x-Achse und dem Graphen von f. Wie kann man beide Werte interpretieren?

Zur Veranschaulichung von Binomial- und Normalverteilung:

- Öffne im TI-Nspire ein „Graphs“ Fenster (2) und füge über menu → 1 → B zwei Schieberegler mit den Bezeichnungen n und p ein. Die Variable n soll die Werte 0 bis 50 mit Schrittweite 2 und die Variable p die Werte 0 bis 1 mit Schrittweite 0.02 annehmen.
- Füge anschließend über menu → 3 → 5 ein Streudiagramm ein, welches die Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung veranschaulichen soll.
  Gib für die x-Werte ein: {seq(x,x,0,n)} dies erzeugt eine Liste {0,1,2,...,n}
  Gib für die y-Werte ein: {binompdf(n,p)} berechnet für p die zu {0,1,2,...,n} gehörenden Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung
- Füge anschließend über menu → 3 → 1 den Term der Normalverteilungsfunktion f(x) ein.

d) Verändere Werte für n und p durch Betätigung der Schieberegler: Wann passt f(x) gut zur Binomialverteilung, wann nicht[1]?
   Tipp: Mit menu → 4 → 1 können Fenstereinstellungen so verändert/festlegt werden, dass die Graphen optimal angezeigt werden.

---

[1] Eine genauere Herleitung dieser Idee findest du z.B. hier: http://mbmr.jimdo.com/-/warum-passt-die-e-funktion-so-gut-zur-binomialverteilung/

Lösungen

Durch das Arbeitsblatt wird der Funktionsterm und jeweils zugehörige Graph der Normalverteilungsfunktion im Vergleich zur Binomialverteilung und erläutert.

a) Zum Erwartungswert:

- Ereignis mit der größten Wahrscheinlichkeit
- Ereignis, das am häufigsten eintritt
- Mittelwert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. eines Zufallsexperiments
- Nimmt allgemein ein Zufallsexperiment die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ an, dann gilt $\mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot P(x_i)$.
- Für Binomialverteilungen gilt: $\mu = n \cdot p$

Begründung: Für Binomialverteilungen, deren Ergebnisse k jeweils die Wahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ annehmen gilt allgemein $\mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot P(x_i)$. Durch Einsetzen erhält man: μ

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \right)$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \right)$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \right)$$

$$= n \cdot p$$

Analog zu Mittelwert in der Statistik, der als einzelner Wert eine Menge erhobener Daten möglichst repräsentativ darstellen soll, ist der Erwartungswert das Ereignis eines Zufallsexperiments, das als einzelner Wert möglichst repräsentativ den Ausgang des Zufallsexperiments darstellen soll.

b) Zur Standardabweichung:

- Zahl zur Beschreibung der Streuung der Ergebnisse um den Erwartungswert
- Die durchschnittliche (häufigste) Abweichung vom Erwartungswert
- Die Abweichung vom Erwartungswert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit
- Nimmt allgemein ein Zufallsexperiment die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ an, dann gilt $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$.
- Für Binomialverteilungen gilt: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Begründung: Für Binomialverteilungen, deren Ergebnisse k jeweils die Wahrscheinlichkeiten $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ annehmen gilt allgemein $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$. Durch Einsetzen erhält man: σ^2

$$= \sum_{k=0}^{n} (k - n \cdot p)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2k \cdot n \cdot p + n^2 \cdot p^2) \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - 2n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} + n^2 \cdot p^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - 2n \cdot p \cdot n \cdot p \qquad + n^2 \cdot p^2 \cdot 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} - n^2 \cdot p^2$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} - n \cdot p \right)$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)} - n \cdot p \right)$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-1-k} - n \cdot p \right)$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \cdot p^{k} \cdot (1-p) - n \cdot p \right)$$

$$= n \cdot p \cdot ((n-1) \cdot p \qquad + 1 \qquad - n \cdot p)$$

$$= n \cdot p \cdot ((n \cdot p - p + 1 - n \cdot p)$$

$$= n \cdot p \cdot (1-p)$$

Analog zur Standardabweichung s in der Statistik, der als einzelner Wert die Abweichungen vom Mittelwert möglichst repräsentativ darstellen soll, ist die Standardabweichung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Maß dafür, wie weit Ereignisse eines Zufallsexperiments vom Erwartungswert durchschnittlich abweichen.

c) Der Flächeninhalt, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt beträgt exakt 1. Der exakte Nachweis ist rechnerisch aufwändig (http://mbmr.jimdo.com/-/warum-passt-die-e-funktion-so-gut-zur-binomialverteilung/die-funktionsgleichung-von-f-teil-2/).

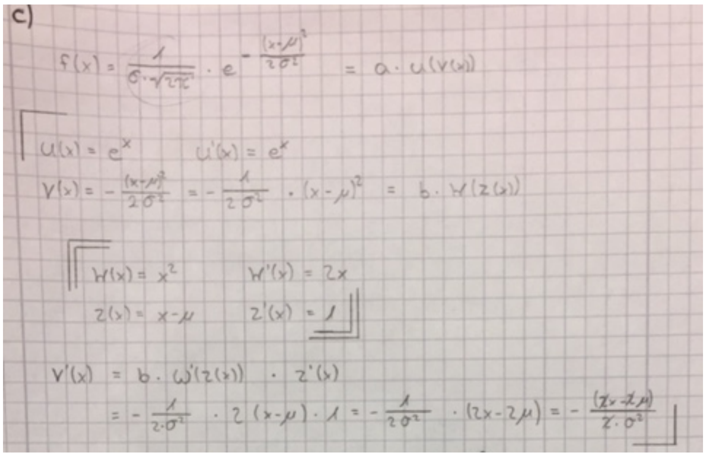
Mit Hilfe des TI-Nspire kann man dies allerdings gut auf verschiedene Arten näherungsweise berechnen: Der rechts abgebildete Screenshot zeigt Ergebnisse für n=100 und p=0,4 (μ=40, $\sigma \approx$4,899) die auf verschiedene Arten berechnet wurden.

$$\int_{-1000}^{1000} \left(\frac{1}{4.899 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-40)^2}{2 \cdot (4.899)^2}} \right) dx \qquad 1.$$

$$\int_{-1000}^{1000} \text{normPdf}(x,40,4.899)\, dx \qquad 1.$$

$$\text{normCdf}(-1000,1000,40,4.899) \qquad 1.$$

c)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = a \cdot u(v(x))$$

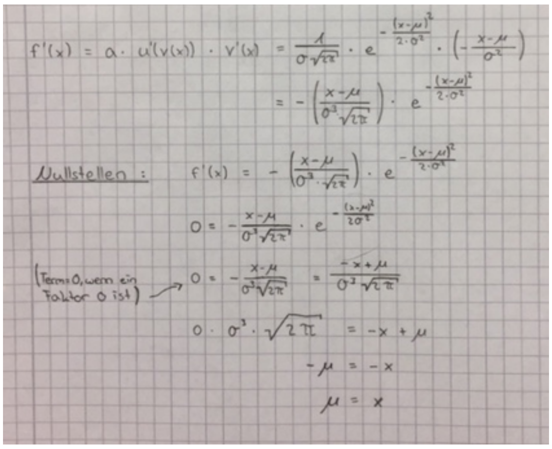
$u(x) = e^x \qquad u'(x) = e^x$

$$v(x) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2 = b \cdot w(z(x))$$

$w(x) = x^2 \qquad w'(x) = 2x$

$z(x) = x-\mu \qquad z'(x) = 1$

$$v'(x) = b \cdot w'(z(x)) \cdot z'(x)$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot 2(x-\mu) \cdot 1 = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (2x-2\mu) = -\frac{(\cancel{2}x-\cancel{2}\mu)}{\cancel{2} \cdot \sigma^2}$$



$$f'(x) = a \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)$$
$$= -\left(\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Nullstellen: $f'(x) = -\left(\frac{x-\mu}{\sigma^3 \cdot \sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$

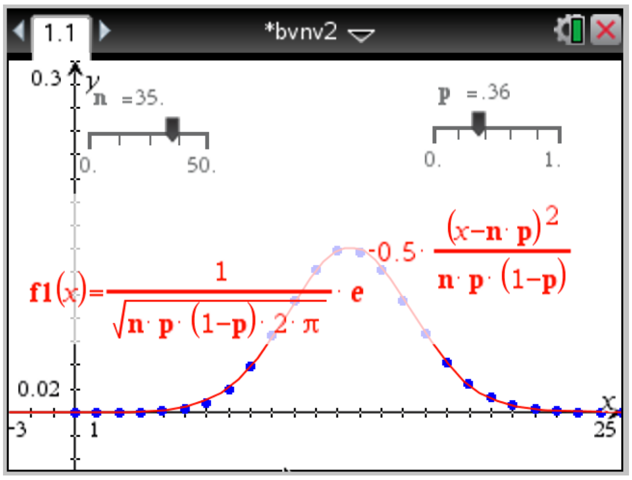
$$0 = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(Term = 0, wenn ein Faktor 0 ist) $\rightarrow$ $0 = -\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} = \frac{-x+\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}$

$$0 \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{2\pi} = -x + \mu$$
$$-\mu = -x$$
$$\mu = x$$

Was fehlt ist der Nachweis, dass f ''(μ)<0 ist.

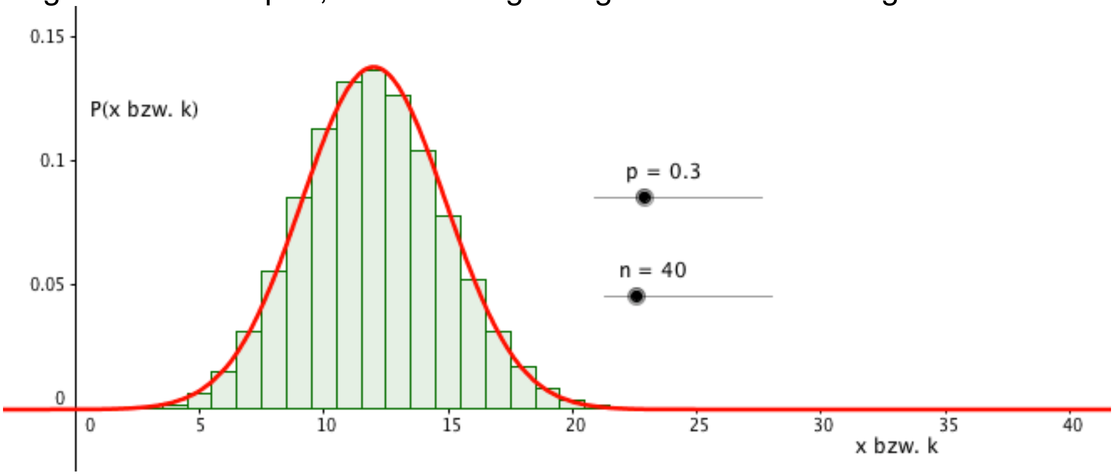
d) Das Fenster sollte nach Eingabe aller Angaben in etwa wie rechts abgebildet aussehen.
Alternativ zum Term von f kann auch „normPdf(x,n·p,$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$)" als Funktion eingegeben werden
Passt man den Bildausschnitt an die Daten an (die x-Werte sollten zwischen 0 und maximal 50, die y-Werte zwischen 0 und maximal 1 liegen), dann kann man erkennen, dass die Punkte des Streudiagramms für besonders große/kleine n und besonders große/kleine p schlecht passen.



Als Faustformel gilt: Ist σ>3, dann passt die Normalverteilung hinreichend gut zur Binomialverteilung

Binomialverteilungen für große n (2)

Binomialverteilungen werden üblicherweise als Histogramm dargestellt. Histogramme sind Säulendiagramme ohne Lücke zwischen den Säulen. Für Binomialverteilungen wählt man als Säulenbreite 1 und als Säulenhöhe die zu k gehörende Wahrscheinlichkeit.
Die folgende Abbildung zeigt ein mit Geogebra erzeugtes Histogramm zu einer Binomialverteilung mit n=40 und p=0,3 und der zugehörigen Normalverteilungsfunktion f.



a) Berechne den Flächeninhalt aller Säulen für k={0,...,12}. Warum kann man den Flächeninhalt der Säulen als Wahrscheinlichkeit interpretieren?

b) Berechne $\int_{-\infty}^{12} f(x)\,dx$ = “$\int_{-\infty}^{12}$ normpdf(-∞,12,μ,σ) dx“ = “normcdf(-∞,12,μ,σ)“.

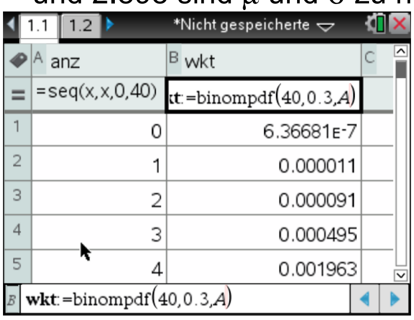
Statt -∞ kann man auch -20 oder -30 einsetzen. Überlege warum!

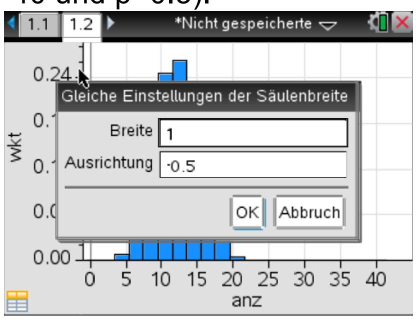
c) Ersetze in b) 12 durch 12,5 und berechne neu. Was fällt beim Vergleich von a), b) und c) auf? Überlege warum.

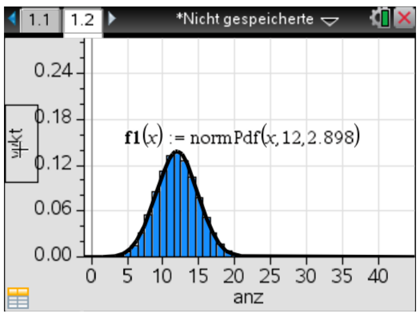
d) Berechne a) und b) für n=400, p=0.3 und k={0,...,120}.

Histogramme lassen sich mit dem TI-Nspire mit „Bordfunktionen“ nur in „Data&Statistics“ darstellen. Hier kann man aber Histogramme auch zusammen mit der Normalverteilung darzustellen:

- Öffne im TI-Nspire ein „Lists&Spreadsheets“-Fenster (4).
- Klicke in der ersten Zeile des Tabellenblattes das Feld A an, gib dort „anz“ und im Feld B „wkt“ als Spaltennamen ein.
- Gib in der zweiten Zeile in Spalte A den Befehl „seq(x,x,0,40)“ ein, um die Zellen A1 bis A41 mit den Zahlen 0 bis 40 zu füllen.
- Gib in der zweiten Zeile in Spalte B den Befehl „binompdf(40,0.3,A)“ ein, um die Zellen B1 bis B41 mit den zu A1 bis A41 gehörenden Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung für n=40 und p=0,3 zu füllen.
- Erstelle über menu → 3 → 8 ein Ergebnisdiagramm: Wähle als X-Liste „anz“, als Ergebnisliste „wkt“ und wähle als Anzeige (zur besseren Übersicht) „Neue Seite“ aus.
- Prüfe über menu → 2 → 2 → 2 → 1, ob unter Säuleneinstellungen die Säulenbreite 1 beträgt. Zur mittigen Anordnung der Säulen sollte die Ausrichtung auf -0.5 gesetzt werden.
- Füge über menu → 4 die Normalverteilungsfunktion durch „normpdf(x,12,2.898)“ ein (12 und 2.898 sind μ und σ zu n=40 und p=0.3).



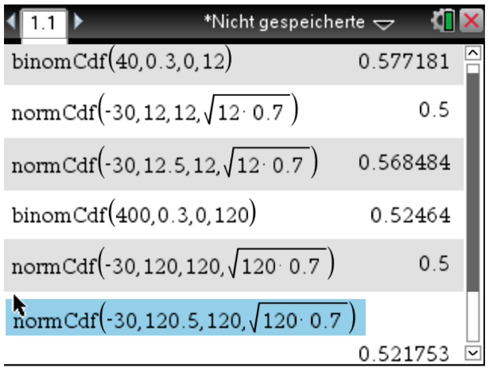




Lösungen:

Es geht auf diesem Blatt darum Flächeninhalte als Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren und das die Genauigkeit der Approximation durch die Normalverteilung von n und p abhängt.

a) Da die Höhe der Säule die jeweilige Wahrscheinlichkeit ist und mit der Breite 1 multipliziert wird, haben Flächeninhalt der Säule und die Wahrscheinlichkeit den gleichen Wert.
Der Screenshot rechts zeigt in der ersten Zeile die Wahrscheinlichkeit 0,577181.



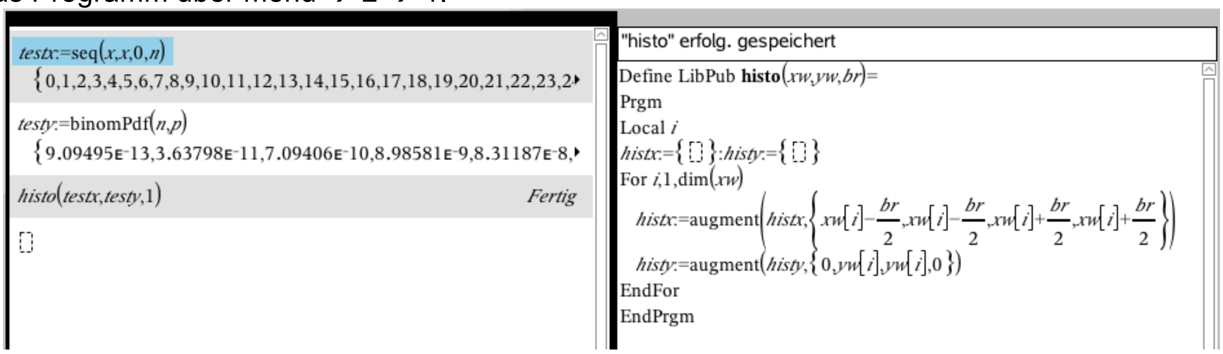
b) Zeile 2 zeigt die Wahrscheinlichkeit 0,5, was um etwa 7% vom gesuchten Wert abweicht. Also liegt nur eingeschränkt eine gute Annäherung vor.
Dies liegt daran, dass $\sigma \approx 2{,}9$, also nicht größer als 3 ist.
-30 ist als Integraluntergrenze ebenso gut wie $-\infty$, da die Normalverteilungsfunktion für $x<0$ nur noch extrem kleine Werte annimmt und daher der Flächeninhalt sich nur noch extrem geringfügig ändert (Wichtig: Das ist keine Begründung sondern nur eine Vermutung, die man mit Zahlenbeispielen verdeutlicht hat!)

c) Die dritte Zeile zeigt, dass die Normalverteilung für 12,5 eine viel bessere Approximation liefert. Das liegt daran, dass die Säule für k=12 die Breite 1 hat, also von 11,5 bis 12,5 reicht. Der Flächeninhalt müsste also bis 12,5 berechnet werden, um eine bestmögliche Annäherung zu erzielen.

d) Vergleiche Zeile 4, 5 und 6.

Bemerkung:

Histogramme lassen sich mit dem TI-Nspire mit „Bordfunktionen“ nur in „Lists&Spreadsheets“ darstellen. Um Histogramme zusammen mit der Normalverteilung im „Graphs-Fenster“ darzustellen, muss man den TI-Nspire programmieren:
Öffne im TI-Nspire ein „Calculator“-Fenster (1) und öffne über menu → 9 → 1 → 1 ein neues Programmierfenster. Gib als Namen „histo“ ein, wähle als Typ „Programm“ und wähle als Bibliothekszugriff „Libpub“ aus. Gib dann das Programm (in Spalte rechts abgebildet) ein und speicher das Programm über menu → 2 → 1.



In der linken Spalte müssen jetzt mit testx und testy bezeichnete x- und y-Datenlisten erzeugt werden. Ersetze hier n und p durch die Zahlen 40 und 0.3. Anschließend muss ein Histogramm durch Eingabe der dritten Zeile erzeugt werden (1 = Spaltenbreite).
Öffne jetzt ein „Graphs“ Fenster und erzeuge über menu → 3 → 5 ein Streudiagramm. Wähle bei „x ←“ über die „var“ Taste „testx“ aus und bestätige mit der „enter“ Taste (bei „y ←“ über die „var“ Taste entsprechend „testy“). Dann müsste das Histogramm gezeichnet werden.
Soll zudem die Normalverteilungsfunktion angezeigt werden, erzeuge über menu → 3 → 1 eine Funktion und gib „normpdf(x,12,2.898)“ ein (12 und 2.898 sind μ und σ zu n=40 und p=0.3).

Binomialverteilungen für große n (3)

Aufgabe 1: Prüfe, ob die Normalverteilungsfunktion gut zur Binomialverteilung für die folgenden Werte passt (m.a.W.: Gilt $\sigma>3$?)

a) n=30, p=0,5 b) n=100, p=0,1 c) n=80, p=0,2 d) n=50, p=0,4

Aufgabe 2: Berechne zu n=200 und p=0,4 Werte für μ und σ.

a) Für welche Zahl z gilt auf 2 NKS genau $\int_{-\infty}^{\mu+z\cdot\sigma} f(x)\,dx = 0{,}95$?
b) Berechne „invnorm(0.95)“.
c) Denke dir selber Werte für n und p aus ($\sigma>3$ sollte erfüllt sein) und wiederhole a) und b). Und/Oder: Ersetze 0,95 durch einen anderen Wert. Was fällt auf?

Aufgabe 3: „Die rosa Partei gewinnt immer mehr Wähler“[2]
Aufgrund von Werbemaßnahmen vermutet man, dass sich der Wähleranteil von 12% für die rosa Partei vergrößert hat. Man führt eine repräsentative Befragung von 1000 Personen durch. Wie viele Personen müssten dann mindestens angeben mit der rosa Partei zu sympathisieren, damit man die Werbemaßnahme mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von
a) 10%
b) 5%
c) 1%
als erfolgreich betrachten kann? Finde verschiedene Möglichkeiten diese Aufgabe zu lösen!

Aufgabe 4: „PC's immer unbeliebter“[2]
Durch Tablets und Smartphones mit großen Bildschirmen werden PC's anscheinend immer unbeliebter. Gaben 4 von 5 Befragten 2010 noch an einen PC zu besitzen, waren es unter 200 Befragten 2016 nur noch 150. Begründe mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von
a) 10%
b) 5%
c) 1%
ob die Aussage der Überschrift zutrifft.

Aufgabe 5: „Stimmung uneinig“[2]
Die Förderung regenerativer Energien ist wichtig, sagen die Einen. Windräder verschandeln unsere Landschaft, sagen die Anderen. In einer 2012 durchgeführten Befragung stimmten 30 von 100 Befragten der Notwendigkeit der Errichtung von Windrädern zu. Ab wie vielen Personen kann man in einer für 2017 geplanten Befragung mit 1000 Personen davon ausgehen, ob sich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von
a) 10%
b) 5%
c) 1%
in der Sicht der Bevölkerung etwas geändert hat?

Aufgabe 6:
Mit dem Intelligenzquotienten (IQ) soll die intellektuelle Begabung gemessen werden. Die Verteilung des IQ wird als nahezu normalverteilt angesehen. In Psychologiebüchern findet man folgende Angaben (nach WECHSLER, 1939):

IQ	Häufigkeit in %	IQ
weniger als 70	2,3	mehr als 130

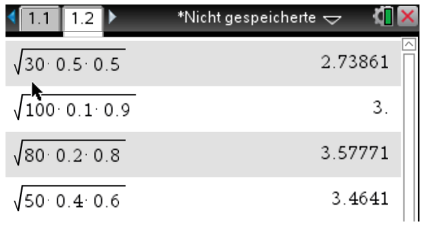
a) Bestimme μ und σ.
b) Wie viel Prozent der Gesamtbevölkerung hat einen IQ, der größer ist als 115, kleiner ist als 95, zwischen 105 und 125 liegt?

---

[2] Ein erfundener Artikel

Lösungen

Aufgabe 1:
Die Prüfung sollte ergeben, dass die Bedingung nur für c) und d) erfüllt ist.



Aufgabe 2:
a) und b) Durch Probieren findet man in a) den Wert $z \approx 1{,}645$ heraus. Ohne Probieren lässt sich z mit Hilfe von „invnorm(0,95)“ mit dem GTR berechnen.
c) Unabhängig von n und p erhält man zu 0,95 den Wert $z \approx 1{,}645$. Für 0,975 ergibt sich z.B. stets $z \approx 1{,}96$.

Aufgabe 3:
$n=1000$, $p=0{,}12$, $\mu=120$, $\sigma \approx 10{,}28$, H_1: Der Wähleranteil hat sich vergrößert ($p>0{,}12$)
Gesucht: x=Kleinste Anzahl an Personen die mit der rosa Partei sympathisieren

Möglichkeit 1: Suche durch Probieren zu $\sum_{k=0}^{x} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}12^k \cdot 0{,}88^{1000-k} > 0{,}9$ das kleinste x.
Möglichkeit 2: Suche durch Probieren zu „binomcdf(1000,0.12,0,x)“>0.9 das kleinste x.
Möglichkeit 3: Suche durch Probieren zu „normcdf(-30,x+0.5,120,10.28)“>0.9 das kleinste x.
Möglichkeit 4: Bestimme „invnorm(0.9)“≈1,28. Berechne $x \approx 120+1{,}28 \cdot 10{,}28 \approx 133{,}2$ und folgere $x=134$. Sind also mindestens 134 Personen für die rosa Partei, kann die Maßnahme mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% als erfolgreich betrachtet werden.
Für 5% gilt $x=120+1{,}645 \cdot 10{,}28 \approx 136{,}911$ also mindestens 137 Personen („invnorm(0.95)“≈1,645).
Für 1% gilt $x=120+2{,}33 \cdot 10{,}28 \approx 143{,}9$ also mindestens 144 Personen („invnorm(0.99)“≈2,33).
Möglichkeit 5: Bestimme „invnorm(0.9,120,10.28)“≈133,2. Sind also mindestens 134 Personen für die rosa Partei, kann die Maßnahme mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10% als erfolgreich betrachtet werden.

Aufgabe 4:
$n=200$, $p=4/5$, $\mu=160$, $\sigma \approx 5{,}65$, H_1: Die Anzahl der PC Besitzer wird geringer ($p<4/5$).
Für H_1 müssen weniger als 160 Personen PC's besitzen:
Für 10%-Irrtumswahrscheinlichkeit gilt $x \approx 160-1.28 \cdot 5{,}65 \approx 152{,}8$ also 152 oder weniger.
Für 5%-Irrtumswahrscheinlichkeit gilt $x \approx 160-1.645 \cdot 5{,}65 \approx 150{,}7$ also 150 oder weniger.
Für 1%-Irrtumswahrscheinlichkeit gilt $x \approx 160-2{,}33 \cdot 5{,}65 \approx 146{,}8$ also 146 oder weniger.

Aufgabe 5:
$n=1000$, $p=0{,}3$, $\mu=300$, $\sigma \approx 14{,}49$, H_1: Die Meinung der Befragten hat sich geändert ($p \neq 0{,}3$).
Für H_1 muss die Anzahl der Windradbefürworter deutlich von 300 Personen abweichen:
Für 10%-Irrtumswahrscheinlichkeit benötigt man „invnorm(0.95)“≈1,645, da die Abweichung beidseitig sein kann: $x \approx 300 \pm 1{,}645 \cdot 14{,}49 \approx 276{,}16$ bzw. 323,8 also 276 und weniger oder 324 und mehr.
Für 5%-Irrtumswahrscheinlichkeit benötigt man „invnorm(0.975)“≈1,96, da die Abweichung beidseitig sein kann: $x \approx 300 \pm 1{,}96 \cdot 14{,}49 \approx 271{,}6$ bzw. 328,4 also 271 und weniger oder 329 und mehr.
Für 1%-Irrtumswahrscheinlichkeit benötigt man „invnorm(0.995)“≈2,576, da die Abweichung beidseitig sein kann: $x \approx 300 \pm 2{,}576 \cdot 14{,}49 \approx 262{,}7$ bzw. 337,3 also 262 und weniger oder 338 und mehr.

Aufgabe 6:
a) Es gilt $\mu=(70+130)/2=100$, da die Daten symmetrisch mit jeweils 2,3% am äußeren Rand verteilt sind. Wegen „invnorm(0.977)“≈1,995 (für 2,3%) gilt $\mu+1{,}995 \cdot \sigma=130$. Einsetzen von $\mu=100$ liefert $\sigma=30/1{,}995 \approx 15{,}03$.
b) IQ>115: „normcdf(115,1000,100,15.03)“≈15,9%, also knapp 16%,
IQ<95: „normcdf(-1000,95,100,15.03)“≈37,0%, also etwa 37%,
105<IQ<125: „normcdf(105,125,100,15.03)“≈32,2%, also gut 32% der Personen.